EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

enaldini Opus

CAROLI RENALDINII

PATRITII ANCONITANI,

ET IN CELEBERRIMA

PISANA ACADEMIA

Philosophiæ Ordinarij Interpretis.

OPVS MATHEMATICVM

IN QVO

Vtraque Algebra, vetus scilicet, & noua à se in Opere, hac de re pridem edito, pertractata nouis præceptis; nouisq; demonstrationibus illustratur.

Methodus quoque Resolutionis, & Compositionis Mathematicæ longè copiosiùs, quàm ibidem, ad abstrusiora Theoremata, & Problemata enodanda declaratur.

Pars prior Numerosam Algebram complectens.

BONONIÆ, Ex Typographia H.H. Ducij. MDCLV.

Superiorum permissu.

SERENISSIMO
COSMO MAGNO
ETRVRIAE PRINCIPI.

CAROLVS RENALDINIVS F.

DEcet humanitatem tuam incomparabilem, decet ſummam clementiam Sereniſs. Princeps mihi ignoſcere, ſi quæ à me tibi cõſecrata, minus digna tàm excelſo, & glorioſo nomine conſpexeris; Non alteri, quam tibi minimè accommodata videbantur. Argumentum haud ignobile meæ tractationis, interq; abſtruſiora Matheſeos arcana non poſtremum debebatur non niſi Principi alacritatem, ſolertiamq; Ingenij maximam à natura ſortito. Quod ſi Principis immortalem gloriam anhelantis intereſt armorum ſtrepitu æque, ac litterarum otio delectari. Tù profectò maioribus non absimilis procliuem animum ad litteras nactus, non minus, quam ad arma tractanda sępe numero Mineruæ Templum inuises, quam e Iouis capite in armis editam commenti sunt prudẽtes Studia fouere S.P.& omne litterarum genus in oculis ferre Imperatoris partes etiam Imperatoribus videbantur; quibus nihil ideo antiquius fuit, quàm vt homines, vel humili loco natos, in quibus tamen ornatus doctrinæ elucesceret, ad sublimiores honoris gradus extollerent. Nec me latet excelsum animum Serenit. Tuę eodem sensu litteratorũ genus omne prosecuturum; Id enim heroica Indoles, Diuinitus tibi elargita, omnino pollicetur. Quod si Magnus ille Augustus nullum labi diem sine meditatione ingenij patiebatur, non dubium, quin tu ad maiora contendas, vt imitatione Scipionis etiam in medijs difficilimi belli apparatibus bonarũ artium studia colas, Philosophorum Lycea frequentes, longè maiori cum gloria. At si qua disciplina Principis animum maximè decorat, si qua inclytum reddit Famę fulgore

Pla-

Platonis quidem oraculo, Ciuilis ipsa est, Politicorum acclamatione, notitia insuper Historiarum. Non minoris tamen est cultura Matheseos, celebriorum præsertim eius partium Militaris, & Mechanices, vt ideo Plutarcus summis laudibus Pyrrum extulerit, quòd eum hę magna delectatione perfunderent. Hæc me Serenifs. Princeps impulerunt, vt quos aspicis labores meos tibi consecratos vellem, Qui si minus felices ob ingenij mei tenuitatem extiterunt, Tu, qua soles, summa humanitate exigui etiam ponderis munera excipere ne despicias. Quod si feceris altiora quoq; quoad mearum virium imbecilitas patietur, meditari conabor.

V.D.

V. D. Andreas Cutica Pœnit. pro Illustriss. ac Reuerendiss. D. Archiepiscopo Bononiæ, & Principe.

V. P. Alexander Simoneta ex Societate Iesu pro Reuerendiss. P. Inquis. Bononiæ.

Imprimatur.

Fr. Gulielmus Inquisitor Bononiæ.

I N-

INDEX CAPITVM

Quæ in hoc volumine continentur.

CAPVT PRIMVM.

CAPVT II.

CAP. III.

Diui-

CAP. IV.

CAP. V.

CAP. VI.

CAP. VII.

CAP. VIII.

CAP. VIIII.

CAP. X.

CAP. XI.

CAP. XII.

Me-

CAP. XIII.

CAP. XIV.

Para-

Para-

SECVNDVM EXEMPLORVM GENVS.

Opor-

CAP. XVIII.

CAP. XIX.

Errata priusquàm legatur corrigenda.

PAg. 10. l. 26. Regula, c. Regola. pag. 13. l. 16. fundorum, c. furdorum. p. 75. l. 10. & denominatum, c. & non denominatum p. 85. l. 26. & præposito, c. & appolito. pag. 88. l. 26. 125. c. 135. p. 87. l. 16 (735. R) ibid. l. 17. (782. Q) c. (162. Q) p. 99. l. 21. fractionum tum c. fractionum ostenditur tum p. 154. l. 18. dum tamen ponas in anteriora c. proruptutus in anteriora p. 167. l. 22. triplum lateris primi 432. c. triplum quadratum lateris primi 432. p. 170. l. vlt. æquale est c. æqualis est. p. 172. l. 1. Cubo c. Cubocubo. 185. l. 6. 1 Q = 10 R ÷ 75 c 1 Q = — 10 R ÷ 75. p. 193. l. penult. 1782. c. 17864. p. 208. l. 27. Plana, adde præsta pluncula ibidem l. 29. è regione 384. scribe excessus planorum ablatitiorum, & l. 30. è regione 10148. scribe Reliquum resoluendi quadrati p. 209. infra lineam 12. sub num. 26. scribe 176. sic. 16 & è regione numeri 176. scribe Summa planorum ablatit. & l. 18. Excessus

16 adde ablatitiorum, ibid. 254. 25. ibid. è regione numerorum 288. & 36.

— scribe Plana ablatitia; & è regione num. 2916. scribe Summa planorum ob-

176 lat. & l. 30. Planum ablatitium c. Planum addititium p. 226. l. 6. 60. c. 64.

p. 232. l. 17. Planum adde ablatitium p. 233. l. 14. 159. c. 156. ibid. l. 23. superiorum c. inferiorum p. 235. l. 27. addititiorum c. ablatitiorum p. 236. l. 29. 288. c. 268. p. 237. l. 19. inferiorum c. superiorum, & l. 20. & 22. numeri 24. & 49. ita collocentur 24

p. 257. l. 23. 126034. c. 120624. & l. 28. 328536. c. 582536. l. 37. 88220. 49

c. 88120. p. 263. l. vlt. 188712. c. 188832. p. 264. l. penult. 3376048. —

c. 3375048. p. 267. l. 2. 68600. c. 98600. l. 23. 101300. c. 101390. pag. 189

237. l. 10. 295. c. 2652. pag. 277. l. 25. num. 27. promoueatur dextrorsum vnius figuræ spatio. p. 279. l. 37. 771700. c. 771600. p. 283. l. 17. 3880. c. 3808. è regione eius dextrorsum scribe Factum à latere secundo in coefficiens solidum. p. 284. l. 24. ablatitia c. addititia p. 288 l. 15. numerus 13104. promoue dextrorsum vnius figuræ spatio p. 295. è regione num 84. l. 4. scribe coefficiens, & l. 13. 4604. c. 4704. p. 297. l. 25. 47300. c. 49360. p. 298. 197128. c. 197120. p. 303. l. 16. 2130. c. 2160. & l. 23. lege 225125. & l. 24. 14705. c. 1470. p. 307. l. 20. dele 1. & è regione 880. l. vlt. scribe Reliquum resoluendi cubi p. 309. l. 41. è regione 352. scribe Summa additiorum l. 42. 376125. c. 376. & è regione scribe Excessus; inferius lin. sequenti scribe 227125. è regione scribe Reliquum resoluendi cubi p. 310. infra l. 23. scribo 98. è regione scribe summa additiorum l. 25. dele 14705. & l. 26. 210425. c. 127125. p. 320. l. vlt. 13375. c. 15375. p. 325. l. 11. 32520. c. 34520. p. 334. l. 9. 32. promoue sinistrorsum item & l. 10. n. 24. & fiat dispositio talis 32 & l. 14. 54520. c. 34520. p. 329. l. 33. in cubum primi c. in

24 quadruplum cubum primi p. 333. l. 12. 200. c. 200. R. & infra

8 l. 24. lege 4000. A latere p. 337. l. 15. 176. c. 1176. primo in

40 coefficiens solidum, quæ verba dele l. 46. p. 340. l. 2. 160. c. 80.

— quæ scribe, vt antecedat vnius figuræ spatio lin. 7. 244536. c.

34520 88426. p. 344. l. 9. 998720. p. 350. l. vlt. 243388. c. 244388. l. 14.

Quo subtracto ex numero c. ex quo subtracto numero p. 357. l. 11. 300. R. c. 800. R. p. 384. l. 26. hoc autem subtrahatur l. 27. ex numero efficiendo c. numerus efficiendi p. 423. l. 26. Radicum numerus c. Radicum pretium p. 471. l. 30. Cæterum auterum autem c. cæteris autem p. 488. l. 8. eiusdem c. cuiusdam.

Admonitio.

REliqua errata, quæ Typographi, & Reuisoris incuria irrepserunt præcipue in Paradigmis, quantum ad notarum dispositionem, siue collocationem studioso Lectori corrigenda relinquimus. Corrigere autem ea facile poterit, si quæ à nobis præcepta traduntur, quantum ad earum collocationem diligenter obseruauerit.

AD LECTOREM.

SI quid esset, Benigne Lector, quod lucubrationibus meis in studijs bonarum Artium cōsequutus fuissem; nihil Typis committere planè animum induxeram, calamumq; reprimere mihi duxeram opportunum; hoc sæculo quandoquidem Aristarchorum feracissimo laboriosum est quidpiam in re litteraria moliri, quod ipsis arrideat, quod ipsis nauseosum non sit: hi namque diligenter id animo tractant aliorum monumenta versantes; idq; meditantur, vt aliquid in ipsis adinueniant; si tamen adinueniunt, quod aliquo pacto minùs probandum esse videatur: immemores cecinisse Lyricum,

Sunt delicta tamen, quibus ignouisse velimus,
Nam, neq; chorda sonum reddit, quem vult manus, & mens; Horatius in Arte Poetica.
Poscentiq; grauem persæpe remittit acutum,
Nec semper feriet quodcunq; minabitur arcus.

Recusant eundem audire canentem.

Verùm vbi plura nitent in carmine non ego paucis
Offendar maculis, quas, aut incuria fudit:
Aut humana parum cauit Natura.

Eorum vnusquisq; se credit inter eruditiores Olympum (vt cum quodam Neoterico loquar) quasi eminentiores montes; hoc est sublimiora cæterorum ingenia, vix ad eius radices se se extollant: quasi nimirum ingenij serenitate fastigium illius fælicitet æmulantes, in perpetua quadam ignorantiæ caligine reliquos omnes ipsi miserandos inspiciant: eorum quisq; se inter alios tanquam Solem inter minora Sydera credit; quasi cæteri si qua luce splendescant, eam ab ipso mutuentur; quinimo omnia tenebris inuoluta suis radijs illustrantem, & illustria obumbrantem haberi Solem omninò contendit. Oh quot Suffeni, qui quidem in operibus suis plurimum se mirantur, sibi blandiuntur, & arrident! Deplorent quæsò Mundi calamitatem,

tem, quòd post eorum mortem hic sit, vt priùs in ignorantiæ tenebris remansurus: quasi cum ipsis Sapientia in hoc Orbe terrarum orta, cum eisdem sit moritura.

Ante faustum eorum natalem fuit ne perpetuò quidem natura prorsus inualida ad ferax ingenium in lucem edendum, fæcunda solùm nascentibus ipsis, sterilis autem in posterum? Est ne fortassis eorum ingenium recti mensura, ad quam vnusquisq; debeat aptari? Oh incredibilem hominum audaciam, oh impudentiam irridendam! Quorsum tanta iactantia, tantusq; aliorum contemptus? Torrentes (vt Lepidissimus ille dicebat) aquarum inopes, magno strepitu ad mare defluunt; altus verò amnis, placidè citra murmur prolabitur. At non mirandum; propterea quòd obtrectatione alienæ scientiæ famam sibi aucupantur. Eos oportet meminisse, aliena facta, vel cuilibet facillimum esse reprehendere. Nec existiment, se posse Lyricum imitari canentem;

Horatius in Arte.

ego fungar vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, exors ipsa secandi.

Nam ipsis exprobrarem illud.

Martialis lib. I. Epig. 92. ad Lælium.

Carpere vel noli nostra, vel ede tua.

Aristoteles Politicorū lib. 8. cap. 6.

Siquidem summus ille Peripateticorum Princeps non insulsè protulit. *Non est porrò obscurum valde referre ad id, vt cuiusdammodi homines fiant; si quis ipse in muneribus, operibusq; fungendis versetur. Nam fieri non potest, aut vix quidem certè, vt qui non fuerunt, munerum, atq; operum participes boni iudices artis fiant.* Annibal non immeritò contemnebat Phormionem illum, qui hostem cum numquam, numquam castra vidisset, se adstante copiosè tamen de Imperatoris officio, & de omni re militari disputare auderet.

Hęc vna huius tempestatis mordax dicacitas me Pythagoræ discipulum, hoc est taciturnum reddere potuisset, & velut Agathonis lapis mihi silentium indixisset, nisi me haud lateret, eorum dicta ex pelui fulgura esse, & plus apud me bonarum artium studiosos adiuuandi cupido valuisset, quàm timor obtrectationis futuræ. Illud tamen per-

perſpicuum eſt; ſi quandoq; nodum aliquem ipſis propoſueris diſſoluendum, te auditurum eos dicentes, vel ſe difficultatem non aſſequi: vel per curas, quibus detinentur ſibi nauare operam ſtudijs non licere, vel id genus alia, quibus haud laborioſum eſt deprehendere nihil ijs cordi eſſe, niſi ſe ipſos laudibus efferre, vt proprij nominis immortalitatem conſequantur: nihil ipſis antiquius, quàm curare, vt alij, tanquam ſi his offuſa ſempiterna nox eſſet, in tenebris vitam traducant. De his tamen hactenus; Qualeſcunq; mei fuerint labores excipe, Benigne Lector, hilari animo, & vtiliores à me, ni fallor, in re litteraria lucubrationes expecta, dum interim te ſaluere etiam, atq; etiam iubeo. Florentiæ, Anno à Virginis partu 1654. Kalen. Ianuarij.

TOTIVS OPERIS PRAEFATIO.

OMNIVM cuiuscunq; ordinis disciplinarum, si quæ præclaris, egregijsq; laudibus efferenda Sapientum omnium consilio iudicetur, si qua est, cuius nomen honestissimum, commendatissimumq; nobis par sit ad Sydera vsq; tollere, ea profectò Mathesis est, quæ cæteris rei consideratæ dignitate, demonstrationum firmitate, perspicuitateq; mirum in modum antecellit. Vnam tamen si excipias, quæ id contemplandum assumit, cuius præstantiam, atq; excellentiam, nullis finibus contineri, luce est meridiana splendidius; & certè, neq; lubentiùs, quàm huic præstantissimæ, neq; liberiùs, quàm huic vtilissimæ laudantis operam impendi decet. Huius tamen innumeris laudibus hic silentio inuolutis cum sapientissimo Socrate sat erit vnum illud adnotasse. Illos, qui præcipuo quodam naturæ munere sunt ad Mathesin accommodati ad omne disciplinæ genus acutiores apparere, qui verò hebetiori sunt ingenio, hac vna eruditos nihil etiam amplius vtilitatis assequentes se ipsis ingeniosiores effici solere; quæ namq; dicebat ipse, difficiliorem, addiscenti, cogitantiq; laborem, curamq; ingerat, non facilè vllam ex rationalibus, honestisq; disciplinis præter hanc inuenies; quod autem difficile, ac arduum, illud idem præclarum asserebat eloquentissimus Tullius. Matheseos autem illa pars illustris, cæteris dignitate præstans, celebris, atq; summopere commendanda, nomine Algebra nuncupata, quæ si rem inspicias, quam sua contem-

Mathematicarũ dignitas.

Socratis dictum.

Algebra Mathematicarũ præstantissima pars.

pla-

platione perſequitur, ſecretiora naturæ myſteria perſcrutatur; & quaſi ſolerti labore, illius dum arcana rimatur: eadem ſumma felicitate, non citra mortalium admirationem, præter omnem ſpem conſequitur.

Hæc illa, quæ de natura celebriora myſteria auarè occultante, quaſi victoriam reportans, atq; triumphans: iurè, ac meritò poteſt gloriari. Hoc planè mirandum, quòd illa reluctante, quæ in veritatis theſauris clauduntur: quæq; ibi deliteſcentia, nulli conſequi licet; & ſi cæteras Matheſeos partes diligenter percurras, vni huic obuiam occurrunt. In hoc fortaſſe deficiens iſta videbitur; quòd etiam ſi numeros tàm excelſa contemplatione perſequatur, non omnibus ſit numeris abſoluta; quòd ampliſſimarum, ac innumerarum ſuarum laudum præconia minimè valeat, ad numerorum calculum redigere. Sed caue ne te iniquum iudicem præbeas; hoc enim neſcio quid redolet ſublimitatis, ac eius præſtantiam arguit. Hæc autem non quadam probabilitate conijciens, ſed certiſſimis, euidentiſſimiſq; demonſtrationibus ſuffulta, ſua promit oracula; non minùs, quàm quæuis alia, quæ certitudine, ac perſpicuitate, cæteris omnibus creditur anteire. Verùm enim verò, ſi præſtantiſſimam hanc, quòd ſublimia myſteria recludat, occultiſſimas cauſas perſcrutetur; atq; adeo maxima tractet, certitudine ſumma, & ineffabili quadam perſpicuitate ſectetur: inuitus etiam fatearis, & æquo animo feras oportet, vt ad eius laudem immortalem hoc etiam decoris, quaſi coronis accedat; nimirum eam ſic inter cæteras eminere;

Quantùm lenta ſolent inter viburna cupreſſi.

Contende, ſi potes, amabò, vt aliam inuenias, quæ ex Matheſeos theſauro deprompta in ijs, quæ inter mortales vſu venire ſolent, non ſolùm maiori pompa triumphi, in debellanda mortalium ignorantia; ſed vtilitate maiori commendabilior videatur; Quid igitur mirum, ſi Græcia docta ſcientiarum mater, & altrix ſe hanc peperiſſe glorietur? Quid mirum ſi Palladi hoc tantummodo beneficio ſe deuinctam profiteatur? Nullum præclarius nimirum ei acceptum referens, quàm hoc ſplendidiſſimum animi decus. Multoq; minus peritiores Arabes nobis admirationem ingerent, quòd hanc quam maximè celebrarint; quandoquidem hæc vna

Græci ſe hanc adinueniſſe profitentur.

Arabes hanc Matheſeos par-

Pro-

Problematibus innumeris facientes, satis: citra puluerem Aenigmata proposita fœliciter enodantes, proprij nominis laudes, ad sydera sustulerunt. Quò cum ingenij fertilitate se superari à Græcis minimè paterentur; aduertentes magnum, atq; veracem esse solertiæ testem huius eximiæ contemplationis inuentum, quasi Mineruæ portentum, non ijs acceptum, sed sibi referendum esse maluerunt. Hæc planè illustria sunt, titulisq; præclarissimis decora: quæ etiam à sagacissimis viris admirationem extorqueant. Longè tamen subimiora, quæ recentiorum perspicacitate nouæ huius nominis Arti comparata iurè meritòq; debentur. Nihil in illius laudibus tàm excelsum, quod in hac longè sublimius non sit; nihil in illa tàm illustre splendescit, quod in has præclarius non eniteat. Humanus animus hac vna sic exornatus videtur, vt cæterarum disciplinarum ornamenta in eo, quasi delitescant huius obruta radijs. Nemini cælum syderibus exornatum, & sculptum intueri licet, dum ingenti splendore Solis vndequaq; perfunditur. Si quis Dedalæo ingenio Matheseos immensum æquor conscendere auderet, vebiq; plenissimis velis, quasi archipirata profiteretur; hac destitutus, vtpote lumine viduatus, mea sententia desperet; mihiq; videretur ille, de quo Lyricus ad hominis audaciam detestandam elegantissimè cecinit.

tem, quam maximè celebrarunt.

Cum Græcis de eius inuentione contendunt.

Noua Algebra maximè commendabilis.

Illi robur, & æs triplex
Circa pectus erat, qui fragilem truci
Commisit pelago ratem
Primus, nec timuit præcipitem Affricum.

Horatius lib. 1. Ode 3.

Is adeo magnos difficultatum scopulos offenderet; vt

Vix durare carinæ
Possent imperiosius
Aequor

Vtq; tibi longè magis constet huius artis præstantia, hominem illum animo si placet, aduerte minus excelsa numerorum contemplatione contentum, requisitum, vt vel ad humanam necessitatem in ijs, quæ inter mortales vsu venire solent: vel ad solius veritatis indagationem Problema, vel Theorema explicet, parum etsi difficultatibus inuolutum: illum enim perspicies, vndiq; vexatum angustijs, huc illuc cursitantem, vt vnius, vel alterius, melioris

Eius dignitas magis declaratur, & vtilitas explicatur.

lioris

lioris notæ monumenta versans, quod in optatis habet assequatur. At verò, vt summa spe animatus varia, diuersaq; volumina adit, & consulit: sic exanimatus eadem abijcit, quòd se incassum laborasse cognoscat; conspicies illum mæstè cogitantem, mærore contabescentem, tædioq; affectum sic, vt nihil supra. Non secus ac iter aggressus, cum occidente Sole, vel nullus est color rebus, ad diuersorium peruenire non licuit: deinde, tenebris horrendis deterritus progredi nequit, inscius quid agat, spe tantùm futuræ lucis ad optatum locum se perventurum sistit. Ita quidem ille, cuiusdam demonstrationis aggressus iter; lumine veritatis, quod ex elementis Matheseos tenue quidem affulget, omnino destitutus, tenebris inuolutus gradum sistet, quo se vertat ignorans non nisi huius disciplinæ, tanquam nouæ radiantis præsidio lucis iter prosequuturus. Ferax adeo campus Mathesis est, quo certè non feracior alter: at in latebris veritas constituta non obuia occurrit. Hæc autem venatrix est; quæ sagaci quodam, vt ita dicam, odoratu cuncta indagat, rimatur, perquirit, assequitur. Veritas adeo iacet occulta, vt Sapiens ille in profundissimo puteo, sibi eam esse persuaserit; inde minimè exire, nisi videlicet Saturni, hoc est diuturni temporis vi extrahatur. Sed hoc inuito Matheseos ista pars veritatem absconditam, quàm citissimè extrahit. Cæteræ quoq; Matheseos partes dignissimæ sunt, vt summis laudibus efferantur. Geometria quidem suis gloriari potest. Hæc illa, qua præditum esse oportebat adeuntem Platonis academiam. Hæc illa, quæ admirandis operibus mortales delectat, eorundem consulit vtilitati, ampla nimirum terrarum spatia, Turrium, atq; Montium celsitudines, profunditates abyssi, Maria, Terras, Cælos, vniuersum Orbem sedulò dimetitur. Nec Astronomia destituitur præconijs suis, vtpote illa, quæ duabus alis Geometria, & Arithmetica suffulta Cælum conscendit, illius, Syderumq; perennem conuersionem, ortum, occasum, sua contemplatione persequens immanem illorum cupiditatem explet, qui animi sublimioris impulsu in illa fulgentissima lumina rapiũtur. Musice quoq; iucundissima, & vtilissima tractat: Quid Melodia suauius? Quid humano generi vtilius? Dorius quandoquidem concentus prudentiæ largitor est, & castitatis effector. Phrygius

Vtilitas eius comprobatur.

Cæteræ Matheseos partes commẽdantur. Geometria.

Astronomia.

Musice.

pu-

pugnas excitat, votumq; furoris inflammat. Aeolius animi tempestates tranquillat, somnumq; placatis affert. Lydius intellectum obtusis acuit, & terreno desiderio grauatis cælestium appetentiam inducit animorum formator eximius. Magna hæc profectò sunt, de quibus Modulatrix disciplina suam tractationem instituit. Quid verò non operosum, non mirandum Mechanicæ præstat? Hæc etiam inuita Natura ingentia pondera sursum euolare facit. Hæc machinamenta molitur, quibus mortalibus, prodigiosa quidem Dedalais operibus, & Archimedais attestantibus patrare licet. Cæteræ omnes laudibus sunt quidem cumulatissimæ. Sed nulla maioribus, quàm Arithmetica, quàm præcipua eius pars, quæ consueuit Algebra nuncupari, quàm deniq; hæc noua excogitata. Vniuersæ Arithmeticæ gloriam, & vtilitatem prætermitto; cum eam neminem latere mihi persuasum habeam. Vna tamen sufficeret Romanos olim sagacissimos, atq; seuerissimos in liberis educandis, in nulla alia disciplina passos esse pueros, quàm in hac se iugiter exercere. Neq; hic prosequar laudum amplissimarum præconia superius adumbrata veteri, quæ debentur Algebræ. Noua tantum sibi gloriæ vendicauit, vt Matheseos vniuersæ ditissimum thesaurum, nulla expeditiùs, vel fæliciùs, quàm hæc, quasi clauis in Cælesti quadam officina elaborata gratia communis mortalium vtilitatis, etiam reluctante Natura possit aperire. Celebris igitur iure credita Matheseos pars, quæ plura fæliciter occultata detegit, quàm aliæ suscipiant detegenda; plura explicat, & absolutissimè tractat, quàm aliæ delibent; & quidem genere maxima, occultatione causarum difficillima, consecutionum implicatione laboriosissima, multiplicitate combinationum implicatissima, atq; demum temporis diuturnitate longissima. Hæc analysi quandoquidem instituta sua, eo progreditur ad veritatem indagandam, quò alteri minimè licet peruenire. Per analyseos vestigia huic demonstrare conceditur, quod alijs omninò denegatur; adeo nimirum, vt veritas nullos fines agnoscens, ab hac vna finibus coerceri patiatur; quò non immeritò dicerem Palladem è cætu litteratorum, nullum maius habere vectigal, quàm illud, quod huius disciplinæ cultor labore exigit suo: ac proinde non mirandum, si verticem extollens pronunciauerit.

Mechanicæ.

Arithmetica cæteris præfertur.

Eius æstimatio apud Romanos.

Algebra præstantissima Arithmeticæ pars.

Noua celebratur, vt tempore veteri præstantior.

Nullum non Problema soluere.

Vieta ad calcem Isagoges.

Vtramq; nos autem explicandam: nouis inuentis, firmisq; demonstrationibus muniendam suscepimus; nam etiam quicunq; sunt habiti mortalium Sapientissimi, multa scisse dicuntur, non omnia, neq; contemplationibus suis maiores nostri veritatis omnia vestigia detexerunt. Veritas enim omnibus patet, nondum est occupata: multum etiam ex illa futuris relictum est; vt Moralis asserebat, eosq; docendo sterilis non euasit, vt nobis nihil sui possit impertiri.

Seneca.

Nomen huius artis explicatur.

Ad hanc autem disciplinam, quod attinet, si quid sibi velit nomen eius inquiras, scito illud Arabicum esse restaurationem significans, sic appellata, quòd restauratione passim vtatur: non à nomine Gebra appellatione desumpta, quasi ab auctore suo; quem potius credendum opinor Diophantum Alexandrinum initio librorum ad Dionysium sibi huius disciplinæ gloriam inuentionis deferentem, atq; testantem ad suam vsq; tempestatem in tenebris latitasse, inquit enim. Quod negotium, vt videtur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cum animi incipientium ad bonam de re dextrè conficiendam, spem concipiendam nequaquam sint procliues. *Varia est quoq; nomina sortita; quandoquidem Almucabula nuncupari consueuit, quòd oppositione inter duo extrema vtatur nomine illo significata. Ars etiam dicitur magna, quòd cæteris Arithmeticæ partibus dignitate longè antecellat; Regula verò Radicis, vel census, seu quadrati solet nuncupari, quòd in enodandis Aenigmatibus, Radicibus, & Quadratis vtatur. Nos autem Itali Regula* della Cosa, *consueuimus appellare; cum Radicem quæsitam* Cosa, *nuncupemus.*

Veteris Algebræ inuĕtor.

Diophantus Alexădrinus in proæmio.

Varia nomina sortita est Almucabula dicitur.

Ars magna.

Regula rei, vel census dici consueuit.

Noua autem huius inuentorem Franciscum Vietam extitisse ambiget nemo; Diophantæa proinde, vt nuncupabitur illa, sic etiam hæc Vietæa dicetur Illa, quòd numerorum characteres adhibeat Numerosa solet appellari; hæc autem quòd Alphabeti formas, speciesq; frequentet speciosa nuncupabitur.

Nouæ Algebræ inuĕtor.

Vetus cur numerosa dicatur.

Noua cur speciosa.

At verò desumentes initium à Numerosa, tanquam à vetustiori, Speciosa etiam fundamento, nostram tractationem aggrediemur. Nominibus autem explicatis, si quis quæreret, quid

ipsa

ipsa sit, fiet voti compos, ni fallor, hac intellecta definitione. Algebra scientia est, quæ ex datis magnitudinibus æqualitatis beneficio magnitudinem ignotam adinueniens, explicans, atq; demonstrans Problemata non soluta soluit; malè soluta reijcit; atq; Theorematum veritatem inquirit. *Quæ quidem definitio satis videtur, ni fallor, huius facultatis naturam explicare, quemadmodum facilè constabit ijs, qui in hoc puluere fuerint, etsi mediocriter versati.* *Algebra definitio.*

At verò in vtraq; Algebra laboribus exantlatis, & vtriusq; artis explicatione absoluta, ad iucundissimum, vtilissimumq; tractatum de Methodo, tàm noua, quàm antiqua Resolutionis, & Compositionis Mathematicæ faciemus gradum: in quo vnicuiq; maximam vtriusq; Algebræ vtilitatem licebit intueri, animaduertenti magna facilitate, nullo negotio ea Problemata resolui: Aenigmatibus fieri satis, quæ Matheseos professoribus plurimum negotij facessunt. Huic autem contemplationi veteris Algebræ vsum ad Geometricè Problemata resoluenda non inutiliter annectemus: vnde constabit veterem Logisticen, non tàm angustis finibus coerceri; quemadmodum nonnullis videbatur; eos enim longè ampliores in Aenigmatibus enodandis ostendemus, quorundam Problematum exemplo, quæ quidem huius Artis, tàm veteris, quàm nouæ præsidio destituta prorsus videbantur. His autem ea, quæ constructione operaria non egent, subijciemus, postremum locum arti, methodoq; deprehendendi, & impossibilitatem, & vanitatem Problematum relinquentes (quod etiam in Numerosa tetigimus) qua quidem contemplatione huius celebris, penèq; Diuinæ Matheseos partis extrema persequemur. *Totius Operis diuisio, & ordo.*

SYNOPSIS EORVM,

Quæ in hoc Volumine continentur.

I.

Algebra vetus demonstrationibus vndequaq; munita, in qua præter ea, quæ ab Antiquis tradita sunt; De Numerosa Potestatum Resolutione, absolutissima tractatio mira facilitate, & exemplis illustrata continetur: Vbi sex Problematum genera proponuntur, & ijs fit satis in Artis illustrationem.

II.

Algebra noua suis demonstrationibus suffulta, in qua etiam de Aequationum recognitione, & earundem emendatione cumulatissimè, & dilucidissimè pertractatur.

III.

Tractatus utilissimus, & iucundissimus de Resolutione, & Compositione Mathematica, tàm iuxta Veterum, quàm iuxta Recentiorum Methodum in resoluendis, componendisq; Theorematibus, & Problematibus; Vbi plura Theoremata, & Problemata etiam & ea, quæ fuerunt à plerisq; ipsi Auctori proposita, ad maiorem explicationem Artis resoluuntur, & componuntur.

IV.

Tractatus de Vsu Veteris Algebræ ad Problemata Geometricè resoluenda; Vbi quamplurima Problemata enodantur.

V.

Tractatus de Methodo resoluendi Problemata, beneficio speciosæ Logistices, quæ alioquin eius præsidio destituta prorsùs credebantur.

VI.

Tractatus de Problematibus, quæ constructione operaria non egent.

VII.

Tractatus de Arte cognoscendi Problematum impossibilitatem, & vanitatem; Seu, de arte, qua tùm impossibilia, tùm vana Problemata cognoscuntur.

CAROLI RENALDINII
PATRITII ANCONITANI,
Et in celeberrima Pisarum Academia Philosophiæ Ordinarij Interpretis.

ALGEBRA VETVS, DIOPHANTAEA, SIVE NVMEROSA.

De Numeris Denominatis, siue Potestatibus.

CAPVT PRIMVM.

Numeri, quos propriè Algebra speculatur.

ETSI ferè omnes, qui disciplinam hanc tractandam susceperunt, triplex numerorum genus contemplentur; nihilominus si rem ipsam introspicere diligenter placet, comperiemus vnicum esse in hac Arte tractandum, vtpote illi peculiare, & proprium: quandoquidem duo reliqua, nimirum irrationalium, siue surdorum simplicium, & compositorum, potiùs ad vulgarem Arithmeticam pertinent, quos ibi nos latè prosequuti sumus. Ad hanc igitur partem illud propriè genus numerorum attinet, qui in quauis Geometrica progressione ab vnitate sumunt initium; qui quidem varia sunt nomina sortiti; propterea quod quibusdam placuit eos Quantitates, Species, Dignitatesq; nuncupare. Maluerunt alij numeros eosdem Cossicos, itemq; Figuratos, atq; Denominatos appellare. Franciscus autem Vieta Mathematicus præstantissimus Diophantum Alexandrinum imitatus, Potestates eos nuncupauit. Cum autem nostri consilij sit nedum Vietæam, sed etiam Diophantæam Algebram pertractare; propterea hosce numeros contemplabimur, primò quidem eo-

rum

rum nomina, & characteres explicantes, ad eorundem Algorithmos deinceps progressuri.

In proposita igitur quacunq; Geometrica progressione initium deducente ab Vnitate, Primus terminus, hoc est vnitas, simplicem, ac absolutum repræsentat numerum. Cæterum *Progressio Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium*. Vt est e. g. hæc numerorum series 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. Vel hæc 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. Prima progreditur per proportionem duplam, adeo vt quilibet numerus duplo maior sit eo numero, qui eum proximè antecedit. Secunda verò per proportionem triplam.

Progressio Geometrica quid.

Vtraq; autem harum progressionum ab 1, incipit; potest autem institui progressio Geometrica initium non desumendo ab 1, sed à quouis numero; vt si esset hæc numerorum series 3, 6, 12, 24, &c. vel 5, 10, 20, &c.

Sed eò redeat vnde huc flexit oratio. In qualibet Geometrica progressione sumente initium ab Vnitate, Primus terminus, hoc est vnitas numerum absolutum, ac simplicem repræsentat, Secundus autem terminus vnitatem sequens Radix omnium sequentium terminorum dicitur: hic enim est Radix tertij termini; cum ex eius multiplicatione in se ipsum procreetur tertius; & ex multiplicatione eiusdem secundi in tertium procreetur quartus; & ex multiplicatione eiusdem secundi in quartum producatur quintus, & sic deinceps. Hæc est enim numerorum continuè ab vnitate proportionalium natura. Si enim fuerint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales; constat ex demonstratis ad 10. Propositionem Octaui lib. Elementorum secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc tertium fieri quartum, ex eodem autem in hunc quartum produci quintum, & ita deinceps. Demonstratur enim ibi, ex eo quia C, D, E, A, sunt continuè proportionales ab vnitate; D, tertium numerum ab vnitate fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E. Cum enim sit, vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad E, & E, ad A, æque metietur vnitas ipsum C,

&C,

& C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A; At verò vnitas metitur ipsum C, per C, ergo C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metictur. Proinde C, seipsum multipli-

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1
Vnitas.

cans fecit D, multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A, ob id erit secundus a b vnitate ex numeris continuè proportionalibus radix omnium sequentium, &c.

Hi porrò numeri cuiuscunq; progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis, Denominati, Cossici, & Dignitates Algebricæ nuncupantur. Characteres autem, & nomina horum terminorum non eadem sunt apud omnes; proinde iuxta duplicem viam, Diophantæam vnam, ac Vietæam alteram in medium afferemus.

Nomina, & Characteres iuxta quosdam Analystas.

N. Numerus simplex, & absolutus.

1. ℞. *Radix, Latus, Italicè verò* Cosa, *Latinè Res: Ab aliquibus verò Tantum appellatur, & solet hoc pacto designari nimirum co.* 2.
2. *Q. Quadratus, Zensus, Census, Potentia. Hanc autem Potestatem aliqui sic designant ce.* 4.
3. *C. Cubus aliqui eum ita designant cu.* 8.
4. *QQ. Quadrato-quadratus, Biquadratus, Censicensus, Zensizensus, Potentia potentiæ, & hoc pacto depingitur ce, ce.* 16.
5. *SS. Primus relatus, Solidus primus, Surdesolidus, Sursolidus, Supersolidus, & à quibusdam sic designatur Rel. P.* 32.
6. *QC. Quadrato-cubus, Censi-cubus, Zensi-cubus, Potentia cubi, Cubi-Zensus, Quadrati-cubus, Cubi-quadratus, &*

hanc

hanc Potestatem sic aliqui designarunt ce, cu. Quamobrem, vt significarent quatuor quadraticubos, hoc modo scribere solebant 4 ce, cu, ad significandos octo quadratocubos, ita scripserunt 8 ce, cu, &c. 64.

7. *BSS. Secundus relatus, Solidus secundus, Bsurdesolidus, Bisurdesolidus, Sursolidus, Supersolidus secundus, Relatus secundus, & solet etiam hoc pacto depingi Rel. 2.* 128.

8. *QQQ. Quadrato-quadrato-quadratus, Triquadratus, Censi-censi-census, Zensi-zensi-zensus, Quadratus quadrati-quadrati; & à nonnullis ita designatur ce, ce, ce.* 256.

9. *CC. Cubi-cubus, Cubus-cubi, Bicubus, & à plerisq; hic adhibetur character, cu, cu.* 512.

10. *QSS. Quad. primi relati, Quadrati solidus, Census primi relati, Zensurdesolidus, Potentia primi relati, Quadr. Surdesolidi, Surdesolidus quadrati. Aliqui eum sic designant Ce. Rel. P.* 1024.

11. *CSS. Tertius relatus, Solidus tertius, Csurdesolidus, Zensurdesolidus, Supersolidus tertius, & nonnulli hoc vtuntur charactere Rel. 3.* 2048.

12. *QQC. Quadrato-quadrato cubus, Censi-censi-cubus, Zensi-zensi-cubus, Cubus de potentia potentiæ.* 4096.

13. *DSS. Quartus relatus, Solidus quartus, Dsurdesolidus, & à quamplarimis ita designatur Rel. 4.* 8192.

Cæterum diuersitatem characterum, & nominum operæ pretium duximus adnotare, ne discendi studiosum in varijs libris perlegendis vexet, aut remoretur ambiguitas. Verùm enim verò præter hæc, oportet aduertere characterem N, significare numerum absolutum, & simplicem: adeo vt numerus cui appositius fuerit pro absoluto, & simplici habeatur; itaut 5. N. nil aliud significent, quàm quinq; vnitates simplices, & absolutas. At verò quia hic character plerumq; negligitur, & omittitur, nec solet numeris apponi, quando pro absolutis habendi sunt; ob id siuè aliquis numerus hoc signum gerat, siuè non, accipi debet pro numero absoluto.

Se-

Secundum characterem, dicebamus esse ℞, atq; significare Radicem, vel Rem; adeo vt numerus, cui sit appositus, à Radicibus denominetur. Itaq; 6 ℞, significant sex radices, vel res: ita fit, vt si progressio Geometrica habeat e. g. 2. in secundo loco; 6 ℞, sint duodecim vnitates: si verò habeat 3. in secundo loco; 6 ℞, sint decem & octo vnitates, & ita de reliquis.

Secundus character est ℞.

Dicebamus tertium characterem esse Q, & significare Quadratum; hunc eundem characterem Censum à plerisq; notauimus appellari. Itaut 6 Q, sint sex Quadrati, vel Zensi; quo fit, vt si tertius numerus progressionis Geometricæ sit 4. fit inquam, vt 6 Q, sint viginti quatuor vnitates; si verò 9, sit tertius numerus ab vnitate 6 Q, valebunt quinquaginta quatuor vnitates.

Tertius character est Q.

Quartus character C, cum denotet cubum, 6 C, significabunt sex cubos; adeo vt si cubus fuerit 8, necessariò 6 C, sint 48, vnitates; si cubus fuerit 27, & 6 C, sint 162. vnitates.

Nomina, & Characteres iuxta Diophantum, & Vietam.

1.	*N.*	*Latus, siue Radix.*	2.
2.	*Q.*	*Quadratus.*	4.
3.	*C.*	*Cubus.*	8.
4.	*QQ.*	*Quadrato-quadratus.*	16.
5.	*QC.*	*Quadrato-cubus.*	32.
6.	*CC.*	*Cubo-cubus.*	64.
7.	*QQC.*	*Quadrato-quadrato-cubus.*	128.
8.	*QCC.*	*Quadrato-cubo-cubus.*	256.
9.	*CCC.*	*Cubo-cubo-cubus.*	512.
10.	*QQCC.*	*Quadrato-quadrato-cubo-cubus.*	1024.
11.	*QCCC.*	*Quadrato cubo-cubo-cubus.*	2048.
12.	*CCCC.*	*Cubo-cubo cubo-cubus.*	4096.
13.	*QQCCC.*	*Quadrato-quadrato-cubo-cubo-cubus.*	8192.

Non omnes conueniunt cum Diophanto in nominãdis dignitatibus.

Liquet ex hactenus dictis à Diophanto, Vietaq; dissentire nonnullos; etenim quadrato-cubus apud Diophantum, & Vietam inter Potestates quintum sortitur locum, apud reliquos autem sextum. Insuper apud Diophantum, atq; Vietam cubo-cubus est sexta Potestas; at apud alios nona, & sic de reliquis, vt aduertentibus cernere licet. Nos autem ad denotandam Radicem loco N, vtemur R, in cæteris non dissentimus, & charactere N, vtemur ad significandum numerum absolutum.

N, quid significet.

Superest, vt hìc methodum aperiamus, qua possimus inquirere characteres datis locis potestatum, & contra; idq; iuxta duplicem viam: & qua arte Potestates ipsas in infinitum propagare valeamus. Interim primò videamus, quid nam sibi velint denominationes illæ, & qua ratione ducant originem à termino cuiuscunq; progressionis Geometricæ ab Vnitate initium desumente. Animaduertendum autem est Potestatum loca denotari per numeros dispositos secundùm naturalem seriem, initio desumpto ab vnitate; qui quidem numeri à plerisq; dicuntur exponentes, & ab alijs indicantes; cur autem sic dicantur, mox videbimus.

Exponentes numeri, qui dicantur.

Explicatur descriptio progressionũ naturaliũ, et Geometr.

Initium fit, vt dictum est, ab Vnitate, loquendo de Potestatum exponentibus; alioquin naturalis progressio ducit originem ab o, exponente numeri absoluti, si tamen exponens propriè dici potest.

Ex superiori descriptione à nobis posita perspicuum relinquitur significatum diuersarum appellationum, & origo earundem à terminis Geometricæ progressionis.

Superior tabula explicatur.

Medio loco posuimus characteres, quibus Potestates designantur: ad læuam legentis posuimus progressionem naturalem, numerorum incipientium à o, quorum est munus exponere Potestatum characteres medio loco positos, terminosq; Geometricæ progressionis ad dexteram legentis.

Cur numeri naturalis progres-

Pluribus autem de causis dici possunt Exponentes; Prima est, quia per terminum o, respondentem numero ab-

soluto

soluto denotatur ipse numerus simplex, & absolutus ex vnitatibus compositus, proinde nullo exponente insignitur; nisi hanc figuram o, exponentem dicere velimus; hunc numerum absolutum aliqui, & nos cum ipsis hoc designamus charactere N; etsi talem esse intelligendum velimus cum aliquis numerus sine vlla nota ponitur; Vt, 2, 4, 6, 20, &c. Significamus autem per notam o, numerum illum nullam habere denominationem, ex numeris denominatis.

sicuti dicãtur exponẽtes. Prima causa.

Nota o, quid significet.

Secunda causa, cur commemorati numeri exponentes dicantur, ea est, quia per secundum terminum eiusdem naturalis progressionis respondentem characteri N, secundum Diophantum, & Vietam, & secundum nos R, & numero 2, ex alio latere in Geometrica progressione constituto denotatur R, hoc est Radicẽ esse primam denominationẽ in numeris Denominatis, vocariq; Radicem; itaut numerus secundus in Geometrica progressione, primam sortiatur denominationem; & sic de reliquis discurrendum est. Tertius deinde terminus 2, ostendit tertium numerum Geometricæ progressionis esse secundam denominationem, & appellari Quadratum, & ita de cæteris intelligendum est.

Secunda ratio.

Tertia ratio est, quia quilibet duo numeri exponentes appellati, si inuicem multiplicentur, producunt exponentem illius characteris, qui componitur ex illis characteribus assumptorum exponentium, si loquamur secundum communem viam; at iuxta Diophantum, si exponentes simul addantur fit exponens potestatis, quæ constat ex characteribus assumptorum exponentium, vt infra dicemus. Exemplum in via communi. Si sumatur numerus 2, exponens Quadrati, & 3, exponens Cubi, ducanturq; adinuicem, producitur numerus 6, exponens potestatis, characterisq; QC; scilicet; Quadratocubi; quæ quidem potestas, constat ex Q, & C, potestatibus assumptorum exponentium 2, & 3, sed iuxta Diophantum addantur ad inuicem 3, & 3, fiet numerus 6, exponens potestatis CC; & sic de reliquis.

Tertia ratio.

 Quar-

Quarta ratio.

Quarta ratio, quia ſecundum communem viam, ſi diuidatur, quicunq; numerus maior per minorẽ quemcunque; quotiens, integer ſi fuerit, deſignat exponentem characteris, qui relinquitur, facta ſubtractione characteris numeri exponentis diuidentis ex charactere numeri exponentis diuiſi. Vt ſi 6, exponens huius characteris QC, diuidatur per 2, exponentem characteris Q, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui quidem relinquitur, ſi ex hoc charactere QC, exponentis 6, tollatur character Q, exponentis 2. Præterea ſi numerus 12, exponens characteris QQC, diuidatur per 4, exponentem characteris QQ, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui relinquitur, ſi ex QQC, tollatur QQ. At iuxta Diophantum, ſi componens numerus exponens ſubtrahatur à ſuo compoſito exponente, relinquitur exponens characteris, qui remanet, ſi ſubtrahatur character ſubtracti exponentis à charactere exponentis, à quo fit ſubtractio.

Quinta ratio.

Quinta ratio eſt, quia deſignant idem exponentes progreſſionis naturalis numerorum; deſignant inquam quot proportiones Geometricæ progreſſionis intercedant inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis, & vnitatem: exponens enim numerus ſemper eſt vno minor, quàm numerus terminorum progreſſionis Geometricæ; tot ſunt enim proportiones ipſæ, quot ipſi termini vno dempto, vt 1, ſupra R, & ſupra 2, ſignificat inter 2, ſiue Radicem, progreſſionis Geometricæ, atq; vnitatem, vnicam contineri proportionem 2, ad 1. At verò 2, ſupra Q, & 4, denotant inter 4, ſiue Q, hoc eſt Quadratum, atq; vnitatem duas comprehendi proportiones 4, ad 2, & 2, ad 1. Præterea 3, ſupra C, & 8, ſignificant inter 8, ſiue C, & vnitatem tres cadere proportiones, nempè 8, ad 4, & 4, ad 2, & 2, ad 1.

Sexta ratio.

Sexta ratio eſt, quia terminus naturalis progreſſionis denotat geneſin ex ipſa radice termini ſibi correſpondentis in Geometrica progreſſione, docet nimirum, quot repetitiones Radicis requirantur ad illius termini procreationem;

tionem; vt figura 2, respondens numero 4, & Q, declarat Quadratum, siue secundam denominationem produci ex multiplicatione Radicis bis positæ: etenim si radix 2, bis ponatur hoc modo 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, procreabitur Quadratus 4: ita per numerum 3, respondentem numero 8, & C, significamus Cubum, siue tertiam denominationem, produci ex Radice ter posita, & multiplicata; etenim si Radix 2, ter ponatur hoc modo 2, 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, & numeri 4, producti fiat pariter multiplicatio in 2, emerget Cubus 8. Præterea per numerum 5, respondentem in via communi SS, & 32, denotatur oportere quinquies repetere 2, Radicem progressionis in proportione dupla, vt 2, 2, 2, 2, 2; facta namq; multiplicatione, emergunt 32: & eodem modo secundum Diophantum, quoad characterem QC, cui respondet numerus 5.

Septima ratio.

Septima ratio est, quia Arithmeticorum terminorum additio Geometricorum terminorum præcipuè multiplicationi respondet; itaut numerus emergens ex additione terminorum Arithmeticæ progressionis, respondeat producto numero è mutua multiplicatione terminorum Geometricæ progressionis, qui à numeris illis exponebantur; sic diuisioni respondet subtractio. Vt si simul addantur 2, & 5, numeri progressionis Arithmeticæ faciunt 7. Ita se habent Q, & SS, quorum exponentes sunt illi numeri 2, & 5, nimirum 4, & 32; etenim Q, est 4, & SS, est 32, si inter se multiplicentur, fiunt 128, videlicet BSS, secundum viam communem; huius autem exponens est 7: ita secundum Diophantum, si 2, & 5, simul addantur fiunt 7; ita Q, & QC, quorum exponentes sunt 2, & 5, nimirum 4, & 32, si inter se multiplicentur, fiunt 128, scilicet QQC, cuius exponens est 7.

Explicatur hæc septima ratio, tàm iuxta viam communẽ, quã iuxta Diophantum.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

Non dissimili modo, sicut 3, & 9, simul faciunt 12, ita C, & CC, nempe 8, & 512, quorum exponentes sunt 3, & 9, inter se multiplicati producunt 4096, nimirum QQC, cuius exponens est, numerus 12, secundum viam communem,

nem; ſic etiam ſuo modo iuxta Diophantum. Ita quoq; de ſubtractione dicendum, vt enim ſubtrahendo 5, à 7, remanet 2; ſic diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens eſt 7, per SS, nimirum per 32, cuius exponens eſt 5, emergit numerus 4, videlicet Q, cuius exponens eſt 2: eodem pacto ſicut ſubtrahendo 3, ex 12, remanent 9, ita diuidendo QQC, nimirum 4096, cuius exponens eſt 12, per C, nempè per 8, cuius exponens eſt 3, emergit CC, ſcilicet 512, cuius exponens eſt 9; idq; ſecundum communem viam: non diſſimili modo res eueniet ſecundum Diophantum. Verùm hactenus de his, quæ videnda relinquimus apud alios; obiter enim hæc adnotanda duximus, ne mutila ſit tractatio.

Dato poteſtatis loco, ſecundum vtrãq; viã characterẽ adinuenire, & cõtra.

Reuertamur ad id, quod erat nobis agendum; nimirum dato poteſtatis loco, ſecundum vtramq; viam, reperire characterem, & contra.

Characteres vel ſunt ſimplices, vel compoſiti.

Characteres, quibus ipſæ poteſtates conſignantur, vel ſimplices ſunt, ſiuè ſolitarij; vel compoſiti, nempè conſtantes ex pluribus. Simplices quidẽ ſunt tres, ſcilicet Quadratus, Cubus, & Surdeſolidus; reliqui autem compoſiti dicuntur, quòd ex ſimplicibus componantur. Hoc verò trifariam accidere poteſt, vel enim exponens eſt numerus compoſitus par, vel compoſitus impar, vel omnino incompoſitus, ſiuè primus. Quid autem ſint numeri iſti docet Euclides.

Lib. ſeptimo.

Explicatur ſuperior doctrina.

Eſto numerus compoſitus par poteſtatis exponens, cuius character quæritur 10: hic numerus diuidatur per 2, fit quotiens 5; hic autem cum ſit numerus primus non eſt rurſus diuidendus: reperiantur characteres debiti numeris 2, & 5, tanquàm exponentibus; & reperiemus characterem QSS, deberi numero 10: itaq; Surdeſolidus quadrati, eſt poteſtas quæſita. Rurſus quæratur character exponentis 12: diuidatur numerus hic per 2, fit quotiens 6; qui rurſus cum ſit compoſitus par, diuidatur per 2, & fit quotiens 3: ergo 2, 2, 3, ſunt partes, quibus deſignantur characteres componentes characterem quæſitum. Inuentis ergo characteracteribus, qui numeris 2, 2, 3, debentur, nempè QQC, fiet quæſitus character QQC; atq; adeo poteſtas quæſita erit Quadrato-quadrato-cubus. Cæterùm huiuſmodi diuiſio inſtituenda eſt per numerum minimum primum; & ſi quotiens fuerit quoq; numerus compoſitus, diuidatur per numerum primum, nimirùm qui eum metitur; & hac methodo procedatur, donec occurrat quotiens nullam partem aliquotam habens; atq; adeo primus: qui quidem diuiſores, & ſi aliquandò contingat, vt idem ſæpius repetatur, vnà cum quotiente vltimo ordinatim diſponantur, ita ut maiores poſteriorem locum obtineant. *Quomodo ſit inſtituẽda diuiſio.*

Secundò hoc idem aſſequemur, indagando numeros, qui ſi inuicem multiplicentur, producant numerum exponentem oblatum; & inuentis numeris aſſignando characteres debitos. Vt ſi fuerit exponens 10; numeri, qui eum producunt, ſunt 2, & 5, quibus debentur Q, & SS; proindè character debitus numero 10, erit QSS, atq; poteſtas erit Quadratus primi relati. Quod ſi character vnius ex numeris, per quos fit multiplicatio, ignoretur; character, atq; poteſtas eadem arte reperiatur. *Secundus modus.*

Si verò poteſtatis exponens fuerit numerus impar compoſitus, vt 9, diuidatur in partes numeroſq; primos, quibus reperiantur characteres. Itaq; diuidatur per 3, & fit quotiens 3; hi verò, cum ſint numeri primi, non expoſcunt vlteriorem partitionem; debentur autem his, characteres C, & C; proinde quæſitus character erit CC, & poteſtas Cubo-cubus. Eodem modo ſi numerus exponens eſſet numerus 15; diuidatur enim per 3, & fiet quotiens 5; hiſce verò numeris debentur C, & SS: quamobrem quæſitus character erit CSS, & eius poteſtas Cubus primi relati, vel Cubiſurdeſolidus, nimirum decima quinta poteſtas. *Quid agẽdũ, quando poteſtatis exponẽs fuerit numerus impar.*

At ſi numerus exponens oblatus fuerit numerus primus, vt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. eorum characteres, ac poteſtates ſic inueſtigantur; habita tamen hac animaduerſione, nẽpè à numeris primis ſignificari relatos, initio ſumpto à quinario nũmero. Cum itaq; exponentis numeri 5, *Quando numerus exponẽs oblatus fuerit numerus primus.*

meri 5, character sit SS, & potestas Primo relatus; ob id secundi numeri primi, nimirum 7, character erit 2SS, & potestas Secundus relatus: sed ad confusionem tollendam vtimur litteris Alphabeti numerorum loco, initio facto à littera B; itaq; 2SS, denotatur BSS.

Huius methodi fundamentum.

Huius autem methodi fundamentum est. Quoniam in quacunque Geometrica progressione, tertius terminus ab vnitate est quadratus, vt demonstrat Euclides lib. 9. Propos. 8. quamobrem illius character est Q, cuius exponens est 2, numerus minimus primus: & quoniam (vt idem ostendit) quartus ab vnitate est Cubus; ob id eius character est C, cuius exponens est 3, numerus autem ab vnitate sextus, neq; Quadratus, neq; Cubus est, nisi existente Quadrato, vel Cubo secundo, ab vnitate termino: proinde sextus hoc designatur charactere SS; diciturq; potestas hæc, Primo relatus. Et quoniam in reliquis numeris primis idem contingit; propterea relati dicuntur, nempè Secundus relatus, Tertius relatus, &c. prout magis, vel minùs recedunt ab ipso Primo relato.

Lib. 9. Propos. 10.

Quomodo dato charactere & Potestate reperiatur exponens, & locus.

Ad inuestigandum potestatis locum, siue numerum exponentem hæc ars adhibenda est. Primò ad indagandum locum Potestatis, cuius exponens est numerus compositus; singulis characteribus correspondentes exponentes applicentur, & inter se multiplicentur: numerus enim ipsa multiplicatione procreatus locum indicabit potestatis.

Exemplum ad superiorem doctrinam illustrandam.

Sit in quæstione locus potestatis illius, cuius character est QC: exponentes sunt 2, & 3, numero 2, respondet character Q, & numero 3, character C; si 2, ducantur in 3, vel è contra, producitur numerus 6, exponens oblati characteris QC.

Quãdo propositus character exponitur à numero incomposito.

Quod si character propositus exponatur à numero incomposito; accipiatur ex progressione primorum numerorum, numerus primus debitus proposito characteri incomposito. Hoc autem sic assequemur: facto initio à quinario, numerentur ex ordine numeri primi; sic enim facilè reperietur ille, qui proposito characteri respondet. Esto, exem-

exemplum. Sit propositus character CSS, nempè Tertius relatus: eius exponens erit numerus primus 11, cum hic sit tertius à quinario inter numeros primos, in eorum progressione. Hactenus de via communi.

Exemplũ.

In via Diophanti, atq; Vietæ ita procedendum est. Potestatis exponens in binarios, ternariosq; numeros resoluatur, & his competentes characteres assignentur, sic enim prosiliet quæsitus character.

Quomodo hæc omnia fieri debeãt in via Diophanti, & Vieta.

Quæratur character exponentis 10, hic numerus resoluatur in 2, 2, 3, 3, reperiantur characteres hisce numeris respondentes, nempè Q, Q, C, C, & emerget character QQCC respondens exponenti 10.

Exẽplo illustratur superior doctrina.

Ratio, fundamentumq; huius regulæ est. Quoniam potestates omnes iuxta Diophantum, Vietæq; consilium, denominantur à Quadrato, vel Cubo, simplo, vel multiplo, vel mixto; à simplo, vt est Cubus; à multiplo, vt est Cubocubus; à misto, vt est Quadrato-cubus; quo fit, vt quæuis potestas composita, pro partibus sui exponentis, habeat numeros 2, vel 3; aut 2, & 3.

Huius regula ratio.

Potestates secundum Diophantũ vnde sumãt denominationem.

Si verò dato charactere, quæratur potestatis exponens, atq; locus; singulis characteribus, assignentur numeri competentes; etenim summa coalescens ex illis exponentem, & locum indicabit. Quæratur exponens, & locus, cuius character est QQCC: Quoniam exponentes sunt 2, 2, 3, 3, quorum est summa 10; proinde dicemus exponentem characteris QQCC, esse 10, & locum eius esse decimum.

Quãdo dato charactere, quæritur potestatis exponens, & locus.

Exemplũ.

Fundamentum est, quia secundum Diophantum, & Vietam exponens, & locus potestatis habetur ex additione exponentium.

Huius regula fundamentum.

Exponens autem sæpesæpius plures habet resolutiones; in huiusmodi casu, ea est vsurpanda diuisio, quæ pauciores partes complectitur. Vt numerus 10, Primò resoluitur in 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 2, 2, 3, 3: Secunda resolutio præfertur primæ, etsi legitimè factæ; quandoquidem partes possidet pauciores. Sic etiam numerus 12, Primò

Quãdo exponens plures habet resolutiones, ea est vsurpanda, quæ pauciores partes habet.

resolui potest in 2, 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 3, 3, 3, 3; Tertiò in 4, 4, 4; Quartò in 6, 6; Hæc postrema nimirum, quæ duas continet partes 6, 6, cæteris præferri debet.

Cùm autem mista est potestas, præferantur depressiores ijs, quæ sunt elatiores. Vt quadrati præferantur cubis, &c. Itaq; potestas decima, quantumuis hoc vtroq; modo designari possit, nempè QQCC, & CCQQ: nihilominus prior designatio adhibenda est.

Quænam via sit exigenda. Duplici modo potestates propagari possũt.

Per quam autem viam incedere debeat Analysta, adhuc res est in controuersia, quam explicandam suscepit Gloriosus Exercit. 2, Decadis 2: in cuius gratiam aduertit duplici methodo propagari posse potestates; communi, & singulari ad mentem Diophanti.

Primus propagationis modus.

Primo modo fit per multiplicationem potestatis in latus, quo pacto alia posterior emergit. Vt latus in latus producit quadratum; & si quadratus in idem latus ducatur producit Cubum, Cubus in idem latus facit quadrato-quadratum; & sic deinceps.

Secundus propagationis modus.

Secundo modo tanquam via singulari propagantur potestates, si multiplicentur potestates, & gignatur potestas. Vt si quadratus ducatur in quadratum, fit quadrato-quadratus. Si verò quadratus ducatur in Cubum fit Quadrato-cubus, iuxta Diophantum: secundum alios fit primus relatus. Cubus autem in Cubum, facit Cubo cubum, ad mentem Diophanti: secundum aliorum consilium, facit Quadrato-cubum; & ita deinceps.

a Lib. 9. prop. 8. Ratio pro primo propagationis modo.

Primus propagandi modus innititur ijs, quę demonstrat [a] Euclides; ostendit enim, si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales extiterint, tertium ab vnitate Quadratum esse, quartum autem Cubum, septimum verò Cubum, & Quadratum. Cum itaq; dignitates Algebricæ nil aliud sint, quàm numeri Geometricè proportionales in progressione continua; ob id satis videtur idonea prima propagationis via.

Exemplum ad explicãdam supe-

Sit Geometrica progressio in proportione dupla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. Liquet numerum 64, simul

qua-

quadratum, & cubum esse; etenim eius latus quadratum est 8, cubicum verò est 4; quapropter numerus 64, potiùs videtur appellandus Quadrato cubus, quàm Cubo cubus; Cumq; 32, neq; sit quadratus, neq; cubus, non videtur dici posse quadrato-cubus. *riorem declinam.*

Diophanti opinioni fauet multiplicationis actus; etenim si 6C, ducantur in 4Q, producuntur 24 QC, siquidem exponentes sunt 2, & 3, quorum summa est 5. Quapropter QC, quintum sortitur locum inter potestates; & ita de cæteris sentiendum est. *Diophãtus qua ratione innixus.*

Discrimen à diuersitate eorum, à quibus desumuntur denominationes, certè proficiscitur. Etenim secundum communem viam potestates denominentur ab ipsa multiplicatione quadratica, cubica, &c. Vt si cubus multiplicetur quadraticè, fit quadrato-cubus, si verò cubicè, fit cubo-cubus; vt si 8, multiplicetur quadraticè, fit numerus 64, nimirum quadrato-cubus. *Discrimen vnde proueniat.*

Iuxta consilium Diophanti, denominatio potestatum desumitur ab ipsis potestatibus, quæ multiplicantur. Quapropter si ducatur numerus cubus 8, in se, fit numerus 64; cum itaq; 64, producatur ex multiplicatione numeri cubi in numerum cubum; ob id non iniuria numerus 64, dicetur cubo-cubus. Cumq; numerus 32 producatur ex ductu numeri 4, quadrati in 8, numerum cubum; dicendus videtur quadrato-cubus. *Potestatum denominatio ad mentem Diophanti.*

Gloriosus in memorato loco eligẽdam putat viam Diophanti, atq; Vietæ; tùm quia elegantior est, tùm quia sic agere cogit multiplicationis actus: siquidem potestas gignitur per multiplicationem aliarum potestatum; potestas verò genita, denominatur à summa exponentium earum potestatum, quæ inter se multiplicantur. *Sententia, & rationes Gloriosi.*

Arguit præterea, quia omne compositum denominari debet à partibus componentibus; ergo potestas genita denominari debet à potestatibus ex quibus componitur; proindè quadratus ductus in cubum, efficit quadrato-cubum. *Alia ratio.*

Refellitur opinio Gloriosi.

Nobis autem rationes allatæ conuincere non videntur; tùm quia non apparet hæc maior elegantia; tùm quia falsum est ad id cogi nos ab actu multiplicationis, quinimò is oppositum persuadet: gratis verò dicta putamus quæ Gloriosus subiungit dicens, non ab ijs, quæ multiplicantur, sed ab actu multiplicationis petendam esse ipsam denominationem. Siquidem potestas quadrati denominationem accipit ab actu multiplicationis, non ab ijs, quæ multiplicantur. Potestas Cubi suam denominationem certè mutuatur ab actu multiplicationis, non autem ab ijs, quæ multiplicantur.

Vnde sumatur denominatio potestatum.

Quamobrem etiam reliquæ potestates denominationem ab actu multiplicationis accipient.

Secūda ratio ad idem ostendendū.

Secundò hoc idem suadetur, examinando, quid sibi velint hi loquendi modi, Quadrato-quadratus, Quadrato-cubus, &c. Certè cōperiemus nihil aliud significare, quàm radicem, sic, vel sic fuisse multiplicatam. Exempli gratia numerus 16, dicetur quadrato-quadratus, quia procreatur ex duplici multiplicatione quadratica radicis 2. Non ob id Diophanti, Vietæq; sententiam reijcimus; solùm hęc innuisse volumus, vt perspicuum fiat, rationes illas non conuincere.

Numerus 16. cur quadrato quadratus dicatur.

Quæ Analysta mutuatur ex elementis Matheseos.

Vberioris doctrinæ gratia nonnulla afferemus, quæ nimirum Analysta mutuatur ab Elementis, quæq; vtriq; Algebræ inseruiunt: Numerosæ quidem peculiaria fiunt, si ad numeros contrahantur; eadem verò, si generaliter sumantur, in Algebra Speciosa poterunt adhiberi.

Quæ Analysta mutuatur ab Elementis Matheseos hæc sunt.

1 *Totum suis partibus æquari.*
2 *Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.*
3 *Si æqualia, æqualibus addantur; tota esse æqualia.*
4 *Si æqualia, æqualibus auferantur; tota esse æqualia.*

5 *Si*

5 *Si æqualia per æqualia multiplicentur; facta esse æqualia.*
6 *Si æqualia per æqualia diuidantur; orta esse æqualia.*
7 *Si quæ sunt proportionalia directè, esse proportionalia inuersè, & alternè.*
8 *Si proportionalia, similia, proportionalibus similibus addantur; tota esse proportionalia.*
9 *Si proportionalia similia, proportionalibus similibus auferantur; residua esse proportionalia.*
10 *Si proportionalia, per proportionalia multiplicentur; facta esse proportionalia.*
11 *Si proportionalia, per proportionalia diuidantur; orta esse proportionalia.*
12 *A communi multiplicatione, vel diuisione, seu communi multiplicatore, vel diuisore, æqualitatem non immutari, vel rationem.*
13 *Facta sub singulis segmentis, æquari facto sub toto.*
14 *Facta continuè sub magnitudinibus, vel ex ijs continuè orta esse æqualia; quocunque magnitudinum ordine, ductio, vel applicatio fiat.*
15 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; quod autem fit sub extremis terminis, æquale sit ei quod fit à medio in se, vel sub medijs; sunt proportionales, & è conuerso.*
16 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; & sit, vt prima ad secundam, ita secunda illa, vel tertia, quæpiam ad aliam: erit quod fit sub extremis terminis, æquale ei, quod fit sub medijs.*

De prioribus his propositionibus vsq; ad sextam inclusiuè, non est cur verba faciamus; cum per se pateant.

Ad septimam quod attinet, patet: quandoquidem si est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [a] inuersè, vt 8, ad 12, ita 4, ad 6: deinde quia est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [b] etiam alternè, vt 12, ad 6, ita 8, ad 4.

Septima explicatio, ac demonstratio.

a *Coroll. 4. propos. quinti.*

b *16. propos. quinti.*

Ad octauam quod attinet. Si est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4: si his similia proportionalia addantur 15, 10, 18, 12; vt fiant 27, 18, 24, 16: erit, vt 27, ad 18, ita 24, ad 16. Debent autem esse proportionalia similia. Si enim, vt est 12, ad 8,

Octaua explicatur, & demonstratur.

Exẽplo explicatur.

ad 8, ita sit 6, ad 4, quæ proportio est sesquialtera; sit verò vt 10, ad 2, ita 15, ad 3, quæ proportio est quintupla; facta verò additione, proueniant 22, 10, 21, 7: non erunt hi numeri proportionales; non est enim, vt 22, ad 10, ita 21, ad 7.

Demonstratur.

Sunto proportionales A, B, C, D; & ipsis addantur similes proportionales E, F, G, H; proueniant autem I, K, L, M: Dico I, K, L, M; proportionales esse; itaut quemadmodum est I, ad K, ita sit L, ad M.

a 16. quinti. *b 18. quinti.* *c 16. quinti.*

Quoniam est, vt A, ad B, ita E, ad F; erit [a] permutando, vt A, ad E, ita B, ad F; & erit [b] componendo, vt A plus E, ad E, ita B plus F, ad F; & rursus permutando, erit [c] A plus E, ad B plus F, vt E, ad F, seu vt G, ad H: at vt G, ad H, ita concludetur C, plus G, ad D plus H; ergo, vt A plus E, ad B plus F, ita erit C plus G, ad D plus H; hoc est, vt I, ad K, ita L, ad M.

A	B	C	D
12	8	6	4
E	F	G	H
15	10	18	12
I	K	L	M
27	18	24	16

Si itaq; proportionalia, &c.

Nona patet ex dictis.

Ad nonam quod attinet: patet ex dictis.

Decimæ explicatio, & exemplo illustratur.

Quantum autem ad decimam, facili negotio declarabitur, & demonstrabitur. Sint proportionales 12, 8, 6, 4; item 15, 10, 24, 16: Vel 12, 8, 6, 4; item 10, 5, 14, 7. Si fiat multiplicatio, vt vides; fient termini producti 180, 80, 144, 64, in primo exemplo; & 120, 40, 84, 28, in secundo, proportionales. Ratio, quia dum proportionalia, per proportionalia multiplicantur, componuntur eædem proportiones. Proportiones autem, quæ ex eisdem proportionibus componuntur, inter se sunt eædem.

12	8	6	4
15	10	24	16
180	80	144	64
12	8	6	4
10	5	14	7
120	40	84	28

Proportiones, quæ ex eisdem proportionibus componũtur inter se sũt eædem.

Proportionum autem compositionem fieri multiplicatione

tione terminorum antecedentium, & consequentium ad inuicem, perspicuum est ex ijs, quæ demonstrauit Euclides, tùm ad 23, sexti, tùm ad 5, octaui libri Elementorum.

Declaratur magis; nàm cum sint 12, & 8, item 10, & 5, (vtar posteriori exemplo) si multiplicemus 12, per 10, & 8, per 5, componetur proportio productorum, scilicet 120, & 40, ex proportione 12, ad 8, & 10, ad 5. Sic etiam cum sint 6, & 4, item 14, & 7; multiplicemus autem 14, per 6, item 7, per 4; proportio productorum 84, & 28, composita erit ex proportione 6, ad 4, & 14, ad 7; hoc est ex 12, ad 8, & 10, ad 5. Quamobrem ex eisdem proportionibus componitur ratio 120, ad 40, ex quibus componitur proportio 84, ad 28. Itaq; 120, 40; 84, 28, proportionales erunt. Rectè igitur dictum fuit: Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, orta esse proportionalia. Eadem intelligenda de priori exemplo, & de omnibus alijs, quæ excogitari possunt. *Declaratur superior doctrina.*

Porrò hæc est proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. Non enim est proportionum additio, quemadmodum perperam nonnulli crediderunt. *Hæc est proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionũ compositione.*

Ad id autem ostendendum. Sunto duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales. Ducatur antecedens A, in antecedentem C, & fiat E; ducaturq; consequens B, in consequentem D, & fiat F. Dico proportionem E, ad F, compositam esse ex proportione A, ad B, & C, ad D. Ex B, in C, fiat G. Quoniam ex A, B, in C, fiunt E, G; erit [a] vt A, ad B, ita E, ad G. Et quoniam rursus ex B, in C, D, fiunt G, F; erit [b] vt C, ad D, ita G, ad F. At verò proportio E, ad F, componitur ex E, ad G, & G, ad F: & vt A, ad B, ita E, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad F. Ergo proportio E, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & C, ad *Demõstratio.*

A	B	C	D	E	F
12	8	15	10	180	80
				G	
				120	

a 18. septimi.
b 17. septimi.

C, ad D. Quod erat ostendendum. Cæterum compositio proportionum, quam in memoratis locis intendit Euclides, respondet multiplicationi denominatorum inter se; at verò hæc proportionum multiplicatio, non differt à multiplicatione denominatorum inter se: rectè igitur concludebatur.

Vndecima propositio declaratur.

Quantum ad vndecimam; patet ex eo quia, dum proportionalia per proportionalia diuiduntur ex eisdem proportionibus, aliæ eædem proportiones auferuntur: vt enim opere multiplicationis proportiones simul componuntur, ita quoq; diuisione vna proportio ex alia aufertur; quandoquidem diuisio resoluit, quod super efficit multiplicatio.

Exẽplo illustratur superior doctrina.

Sint proportionales 180, 80, 108, 48. Diuidantur per proportionales 12, 8, 6, 4: Orientur 15, 10, 18, 12, pariter proportionales.

Demõstratio.

Demonstrabitur autem, si supponamus hanc subtractionem fieri per diuisionem, & esse contrariam compositioni. Sit subtrahenda proportio C, ad D, ex proportione A, ad B: Hoc potiùs est diuidere proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D; quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahere, vt videbimus.

A	B	A	B
180	80	108	48
C	D	C	D
12	8	6	4
E	F	E	F
1440	960	432	288
G		G	
2160		648	

Ex A, in D, fiat E: & ex B, in C, fiat F. Dico proportionem

nem E, ad F, quæ producitur ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, esse eam, quæ relinquitur sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: seu quod idem est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportione C, ad D, & E, ad F. Fiat G, ex A, in C. Quoniam ex A, B, in C, fiunt G, F; erit [a] vt A, ad B, ita G, ad F. Et rursus quoniam ex A, in C, D, fiunt G, E; erit [b] vt C, ad D, ita G, ad E. At verò cum proportio G, ad F, sit composita ex proportionibus G, ad E, & E, ad F; erit proportio A, ad B, quæ eadem est cum proportione G, ad F, composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est C, ad D, & E, ad F: quamobrem subtracta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; remanebit proportio E, ad F, quod erat ostendendum.

a 18. septimi.
b 18. septimi.

Si verò A, diuidatur per C; proueniat H: Si B, diuidatur per D; proueniat I: Si verò L, diuidatur per N; proueniat P: Si M, diuidatur per O; proueniat Q: & D, multiplicans A, faciat E; vt C, multiplicando B, faciat F; item O, multiplicando L, faciat R; & N, multiplicando M, faciat S.

Demõstratio principalis supradictorum.

A 180	B 80	L 108	M 48
C 12	D 8	N 6	O 4
H 15	I 10	P 18	Q 12
E 1440	F 960	R 432	S 288

Proinde C, multiplicando H, producit A; siquidem A, dùm per C, diuidebatur, proueniebat H. Item D, multiplicans I, producit B; & N, multiplicans P, producit L; vt O, multiplicans Q, producit M. At verò D, multiplicans A, fecerat E; & C, multiplicans B, fecerat F; item O, multiplicans L, fecerat R; & N, multiplicans M, fecerat S: erit, vt E, ad F, ita H, ad I; &, vt R, ad I, ita P, ad Q: Quandoquidem C, multiplicans H, producit A; & D, multiplicans I, producit B; item N, multiplicando P, producit L; & O, multiplicando Q, producit M. At verò C, multiplicando B, producit F; & D, multiplicando A, producit E; item O, multiplicando L, producit R; & N, multiplicando M, producit S: Quoties igitur vnitas metitur C, toties H, metitur A; & quoties vnitas metitur D, toties I, metitur B; & quoties vnitas metitur N, toties P, metitur L, &c. At verò quoties vnitas metitur C, toties B, metitur F; & quoties vnitas metitur D, toties A, metietur E; & quoties vnitas metitur N, toties M, metietur S, &c. Vt igitur vnitas ad C, ita H, ad A; &, vt vnitas ad D, ita I, ad B; & vt vnitas ad N, ita P, ad L, &c. Sed, vt vnitas, ad C, ita B, ad F; ergo vt H, ad A, ita B, ad F. Et vt vnitas, ad D, ita A, ad E: ergo, vt I, ad B, ita A, ad E: quapropter erit [a] secundum rationem perturbatam, vt H, ad E, ita I, ad F; ac proinde permutando, erit [b] quidem H, ad I, vt E, ad F. Eodem discursu concludemus esse, vt R, ad S, ita P, ad Q.

[a] 23. quinti.

[b] 16. quinti.

Speculum demonstrationis.

Vnitas	C	H	A	Vnitas	N	P	L
	12	15	180		6	18	108
Vnitas	D	I	B	Vnitas	O	Q	M
	8	10	80		4	12	48
Vnitas	C	B	F	Vnitas	N	M	S
	12	80	960		6	48	288
Vnitas	D	A	E	Vnitas	O	L	R
	8	180	1440		4	108	432

Compendiosius idem traditur.

H	A	E	P	L	R
15	180	1440	18	108	432
I	B	F	Q	M	S
10	80	960	12	48	288

Sed

Sed E, F, R, S, sunt proportionales: quandoquidem C, D, N, O, proportionales ex hypothesi, multiplicantes terminos proportionales A, B, L, M; nimirum D, multiplicans A; & C, multiplicans B; item O, multiplicans L; & N, multiplicans M, fecerunt terminos E, F, R, S: ob id erunt etiam proportionales illi quatuor termini H, I, P, Q, quod erat ostendendum. Rectè igitur dictum fuit. Si proportionalia, per proportionalia diuidātur; orta esse proportionalia.

SCHOLION.

Assumpsimus superius proportiones, quæ ex eisdem proportionibus componuntur, inter se quoq; easdem esse: cum ostenderemus, si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta esse proportionalia. Nec immeritò; si quidem facilè demonstrari potest: & communiter id ab antiquis, Geometris receptum est; vt videre licet passim apud Apollonium, Pappum, & alios. *Declarantur ea, quæ superius assumpta fuerunt.*

Quoad hunc alium arguendi modum attinet, de quo postremo loco verba fecimus; si nimirum proportionalia per proportionalia diuidantur, &c. apud nobilissimos Geometras ipsum reperire licet.

Quantum ad duodecimam propositionem; ea certè constat, neq; indiget explicatione: si namq; duo sint æqualitatis extrema, quæ per communem diuisorem diuidantur, æqualitas non euanescit. Vt 100 $=$ 100. per communem diuisorem institutæ diuisione, vt per 5; fiet adhuc æquatio inter 20, ex vna parte, & 20, ex altera. Neq; curandum, quòd allata æquatio sit inutilis ad artificium Algebricum, vt suo loco constabit, eā enim attulimus exempli loco, ad hanc veritatem ostendendam, ad quod illa planè sufficit. Idem constat in æquatione vtili. Vt si 10R, æquentur 100, adhuc 2R, æquabuntur 20. *Duodecima ostenditur.*

Proportio quoque non immutatur, vt si sint proportionales. *Nec immutatur proportio.*

60, 20, 150, 50.

 Facta

Facta applicatione ad 5, omnibus scilicet terminis diuisis per 5; adhuc erunt proportionales.

12, 4, 30, 10.

Eandem nimirum triplam proportionem retinentes termini ex applicatione, vel diuisione prouenientes.

SCHOLION.

Haec omnia patent ex Elementis; placuit nihilominus explicationem aliquam in gratiam Tyronum afferre. Caeterum his, quae attulimus, praecipuè vtitur Algebra, etiam si ea omnibus Matheseos partibus inseruiant: Ob id non inutile duximus, ea hic adnotare, eò vel maximè, quòd si quae difficiliora videntur, curauimus, vt quapotuimus facilitate, clariora hoc in loco exhiberentur: vt his nimirum iactis fundamentis, Ars ipsa melius percipiatur. Inde tamen non fit, quin Elementorum, quorum cognitio apud Euclidem habetur, ad hanc disciplinam, atq; Matheseos partem necessaria sit; Nemo enim aenigmata soluens, eorum demonstrationes feliciter contexet; quinimò, neq; hanc artem perfectè assequetur illius cognitionis expers. Sunt enim elementa prima, quorum notitiam praehabere oportet, ad omnem Matheseos partem capescendam.

His, quae superius allata fuerunt, praecipuè innititur Algebra.

Elementorum cognitio, maximè necessaria, ad hanc matheseos partem.

Non abs re iudicauimus has infrascriptas definitiones in memoriam reuocare.

DEFINITIONES.

Qvadratum, quod etiam Potentia nuncupatur, est illa Potestas, quae producitur ex multiplicatione lateris in se; seu quae producitur ex radice bis posita, & multiplicata.

Quadratũ, seu Potẽtia quid.

Cubus est illa potestas, quae producitur ex ductu quadrati in latus; seu quae emergit ex radice ter posita, & multiplicata.

Cubus quid.

Quadrato-quadratum est illa, quae emergit ex multiplicatione quadrati in se; seu quae fit radice quater posita, & multiplicata.

Quadrato-quadratũ quid.

Et non dissimili modo poterunt reliquae Potestates definiri, tam

Caetera potestates.

iuxta

iuxta mentem eorum, qui dissentiunt à Diophanto, in ipsis appellationibus, quàm ad mentem eiusdem Diophanti. Et hinc patet, quid sint Radices, Quadrata, Cubica, &c.

quid sint insinuatur.
Quid sint radices.

Additio numeri ad numerum est acceptio illius numeri, qui præcisè coalescit tanquam ex partibus, ex numeris illis qui addi dicuntur.

Additio quid.

Subtractio est sumptio excessus numeri vnius supra numerum alterum.

Subtractio quid.

Multiplicatio numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

Multiplicatio quid.

Seu multiplicatio numeri per numerum, est acceptio numeri illius, qui ad multiplicatum, eam habet rationem, quam multiplicans ad vnitatem.

Aliter.

Sumptus hic numerus Productum dicitur.

Productū.

Diuisio numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus, ad diuidentem.

Diuisio quid.

Seu diuisio numeri per numerum, est acceptio numeri, ad quem diuisus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem.

Aliter.

Acceptus hic numerus Prouenient, siue Quotiens appellatur.

Quotiens.

Ad denotandam autem Additionem, Defectum, & Aequalitatem his vtimur characteribus nempè † est signum additorum, & — est signum defectorum. Vt verò denotemus aliquid alicui æquale esse breuitati consulentes talem notam frequentabimus ═. Cæterum signa † & — afficiunt numeros subsequentes, vt si esset 4Q † 2R signo † afficitur numerus 2R, non autem 4Q. Quando verò nullum signum præcedit numerum intelligitur numerus ille affectus signo †. Vt significemus radicem, quæ est Potestas, hoc vtimur charactere R, sed pro signo radicali præponendo numeris, hoc vtemur charactere ℞ ad distinctionem radicis, quæ est Potestas. Ad denotandam radicem quadratam ita scribimus ℞Q; ad radicem cubicam significandam, hoc vtimur charactere ℞C, & sic de reliquis. Signum autem hoc ℞ ( ), significat radicem vniuersalem,

Characterum nonnullorū explicatio.
Signum † quid significet. quid signum — quid significet.
Character R quid significet.
Character ℞ quid significet.

siuè

siuè ligatam; itaq; ℞ Q ( ), denotabit radicem quadratam vniuersalem, & sic de reliquis. Quomodo autem id intelligi debeat suo loco explicabimus. Sat est hic ipsum characterem indicasse. Cum autem absolutè hunc adhibemus characterem ℞, intelligi volumus radicem quadratam, & si scribatur sine addito charactere Q; quod maximè est obseruandum, & memoriæ mandandum.

De numeratione numerorum Denominatorum, seu Potestatum, tàm simplicium, quàm compositarum per numeros, tàm absolutos, quàm irrationales seu surdos.

CAPVT II.

Numeratio potestatum.

CHaracteres, vnitati, vel numeris apponuntur, & Potestates ipsis characteribus denotatæ ab illis numerantur. Vt 1R, 2R; 1Q, 2Q; 1C, 2C, &c. Significamus autem per numerum characteri præpositum, multitudinem illius Potestatis, quæ ab illo charactere significatur, atq; adeo hac nota 1R, denotamus 1R, hac verò 2R, duas radices, hac alia 3R, tres radices, &c. Præterea hac nota 1Q, significamus vnum quadratum, hac alia 2Q, denotamus duo quadrata, & ita de reliquis, &c.

Numeri simplices, qui dicantur.

Numeri compositi.

Diminuti numeri qui.

Horum numerorũ expressio.

Numeri autem Simplices dicuntur, cum in ipsis non exprimitur signum † vel ⟶. Cum autem hisce coniunguntur signis †, vel ⟶; vt si ita se haberent 10Q†4R, Vel 6C†3Q, item 7Q ⟶ 2R, vel 12C ⟶ 5Q: huiusmodi numeri Compositi dicuntur; propriè tamen sibi nomen istud vendicarunt ij, qui signo † connectuntur; cæteri namq; per signum ⟶ Diminuti nuncupantur. Illi verò, quibus vtrumq; interponitur signum, vt 8QQ† 10C ⟶ 4Q† 1cR, Mixti dicuntur. Omnes tamen generali quadam nomenclatura Compositi dici possunt. Quo verò pacto exprimantur videamus.

Cum

Cum scribimus 5Q†3R, nil aliud denotamus, quàm quinque quadrata plus tribus radicibus. Item 6Q†7R, sic efferuntur, sex quadrata plus septem radicibus. Præterea 6Q — 10R, sic pronunciantur, sex quadrata minus decem radicibus. Quod si fuerit trinomium, vt 25Q†6R — 10C, pronunciabitur hoc modo, vigintiquinq; quadrata plus sex radicibus minus decem cubis; & ita de reliquis intelligendum est. Quod si non omnes sint numeri denominati, sed intercipiantur numeri absoluti, vt 15C†5Q†6R†2 non dissimili modo efferuntur; videlicet quindecim cubi plus quinque quadratis plus sex radicibus plus duabus vnitatibus.

Quo pacto fiat numerorum pronunciatio.

Huc vsq; de Potestatum numeratione per numeros absolutos sequitur per irrationales, seu surdos. Quando soli ponuntur, vt ℞Q7R, ℞Q10R, ℞C75Q, RQ 8C, &c. sic exprimuntur: Radix quadrata septem radicum: Radix quadrata decem quadratorum: Radix cubica quindecim quadratorum: Radix quadrata decem & octo cuborum. Cum autem signis coniunguntur, eodem pacto discurrendum est, quo supra oportere dicebamus. Vt 2Q†℞Q3R — 2, sic pronunciabuntur: duo quadrata plus radice quadrata trium radicum minus duabus vnitatibus.

Numeratio potestatum per numeros irrationales.

Quòd si radix fuerit ligata, siuè vniuersalis, eaq; simplex, vt ℞(15Q) vel ℞(17C), significatur extrahendam esse radicem quadratam, vel cubicam, vel aliam quamcumq; iuxta characteris naturam, non solùm ex numero, verùm etiam ex potestate, & ita pronunciatur: Radix quadrata ligata, siue vniuersalis, quindecim quadratorum: Radix quadrata ligata, seu vniuersalis decem & septem cuborum.

Radix ligata simplex.

Si radix fuerit ligata, siue vniuersalis composita, vt ℞Q (6†℞Q5R) sic pronunciabitur: Radix quadrata vniuersalis sex vnitatum plus radice quadrata quinq; radicum: & ita de singulis quid sibi velint patet ex dictis, & suo loco de numeris surdis.

Radix ligata, seu vniuersalis composita.

SCHO-

SCHOLION.

Declarantur præcepta superius tradita.

VT facilius intelligantur, quæ superius à nobis dicta sunt, placuit hic Scholion apponere. Cum scribimus ℞ 7 R, vel ℞ 7 Q, significare intendimus R, valorem, ductum esse in ℞ 7, & 1 Q, pretium ductum esse in ℞ 7, &c. Vt si sit ℞ 16 R, idem erit ac 4 R; si sit ℞ 16 Q, erit idem ac 4 Q.

At verò dum intra parenthesim clauduntur, significamus extrahendam esse ℞ tàm ex numero, quàm ex dignitate; Itaq; dum dicimus ℞ (7 R) significamus extrahendam esse radicem, tàm ex numero, quàm ex dignitate. Sic dum scribimus ℞ (10 Q) & ℞ (16 C) eodem modo intelligi debent, &c.

Explicatio supradictorum.

Explicabimus tamen facilè, quid significare intendimus, si in absolutos numeros, omnia hæc resoluamus hac lege. Sit ℞ Q (25 Q); & per, R pretium intelligamus 6, siuè ponamus, R pretium esse 6, erit 1 Q, valor 36; Itaq; 25 Q valebunt 900; huius autẽ numeri ℞ Q est 30, cum itaq; nos scribimus ℞ (25 Q) intelligimus extrahendam esse radicem quadratam tàm ex numero 25, quàm ex Q, ac proinde cum ℞ Q numeri 25, sit 5, & ipsius Q radix sit R, erit latus quadratum 5 R, cuius valor est 30, nempè ℞ Q, numeri 900, vti perspicuum est.

Quando fit inclusio intra parenthesim.

Quando itaq; fit inclusio intra parenthesim, significamus extrahendam esse radicem, tàm ex numero, quàm ex dignitate; adeò vt pretium illius sit radix numeri, qui fit ex dignitatis valore multiplicato in numerum ipsum; Vt huius ℞ Q (25 Q) si 1 R, valor est 6, certè valebit 30, cum autem non includitur intra parenthesim, significatur valor dignitatis multiplicatus per numerum illum irrationalem; vt si esset ℞ Q 7 Q significatur 36, pretium vnius Q, multiplicatum esse per ℞ Q 7.

Quãdo dignitas habet radicẽ, numerus autem non habet.

Cum autem dignitas habet radicem, numerus verò non habet, sitq; radix extrahenda; oportet eruere radicem ex dignitate, numero verò præponendum est signum radicale. Vt si esset 20 Q: huius profectò erit radix quadrata hæc, nempè ℞ Q 20 R, ex dignitate, quandoquidem radix extrahi potest; non autem ex numero, cui præpositum est signum radicale. At verò per ℞ Q 20 R signi-

significare intendimus pretium 1 R, esse multiplicatum per ℞ Q numeri 20, etenim numerus ille consurgens per multiplicationem, est illius numeri, scilicet ℞ Q 20 R, pretium. Cæterum ipsius ℞ Q 20 R, quadratum est 20 Q, & huius pretium est 720;

720	20 Q
℞ Q 720	℞ Q 20 R

si nimirum valor 1 R, est 6, quo fit, vt lateris illius valor, nimirum ipsius ℞ Q 20 R, qui est latus ipsius 20 Q, sit inquam, vt sit ℞ Q 720.

Ad hoc autem magis declarandum vtamur numero habente radicem, perinde ac si radicem non haberet. Sit igitur 25 Q: huius numeri ℞ Q, erit ℞ Q 25 R; quod si vnius radicis pretium sit 6, ipsius 25 Q, pretium erit 900. Et ipsius ℞ 25 R, erit ℞ 900, hoc est 30, hic enim numerus respondet 5 R, quæ æquipollent ipsi ℞ 25 R, quemadmodum 30, æquipollent ℞ 900. Hæc autem omnia ex opposito paradigmate possunt innotescere.

Quæ superius dicta sunt magis declarantur.

900	25 Q
℞ Q 900	℞ Q 25 R
30	5 R

Recolendum autem est in memoriam id, quod superius innuimus, nimirum hæc signa † & — referri ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Præterea illud etiam præ oculis habendum; numerum scilicet, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligendum habere signum additorum, seu additionis.

Nonnulla in memoriam reuocanda.

Cæterum, quæ hactenus diximus intelligenda sunt, de omni radicis genere, & si tantummodo de radice quadrata verba fecerimus.

De Algorithmo Denominatorum numerorum, siue Poteſtatum.

CAPVT III.

Algorithmus quid.

ALgorithmus nihil eſt aliud, quàm numerorum tractatio, complectens illas vulgatas operationes, nimirum Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, & Diuiſionem. De his autem à nobis in præſentia eſt habendus ſermo; & primò tractandum de huiuſmodi operationibus, quoad numeros denominatos, qui numerantur per numeros abſolutos, initio facto ab additione.

Numerorum Denominatorum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Numerorũ denominatorum diuiſio. Simplices Compoſiti Diminuti Mixti. Simplices, vel ſunt eiuſdẽ, vel diuerſæ denominationis. Præceptum additionis. Demõſtratio.

AVt numeri denominati addendi ſunt ſimplices, & ſolitarij, vt 5 R, 8 R, 15 R, 20 Q, 11 C &c. vel compoſiti, vt 20 Q † 2 R, & 7 C † 3 Q &c. Diminuti, vt 15 Q – 6 R, & 4 C – 2 Q &c. at verò Miſti, vt 18 C † 10 Q – 6 R, & 10 C – 7 Q † 4 R. Si ſimplices, vel ſunt eiuſdem appellationis, vt R, vel Q, vel C, &c. Si fuerint denominationis eiuſdem, eodem pacto fieri debet additio, quo fit in numeris vulgaribus, retento eodem charactere; itaq; ſi ſit iniunctum ad 20 R, addere 10 R, fiet ſumma 30 R, ſi verò 15 Q, debeant addi ad 5 Q, fiet aggregatum 20 Q, & ſic de ſingulis.

Demonſtratio eadem eſt cum illa numerorum vulgarium; cum enim additio numeri ad numerum, nihil aliud ſit, quàm acceptio, &c. Certè non alio modo fieri debet, neq; illa ſumma poteſt exhiberi, quàm ſimul vniendo partes, ex quibus conſtat; omnis enim numerus ex illis partibus

bus coalescit, in quas resoluitur (quemadmodum omnis alia quantitas) & quæ simul sumptæ restituunt totum.

Quod si numeri denominati, fuerint appellationis diuersæ, adduntur beneficio signi additorum; nimirum †. Itaq; si sit opus ad 10 Q, addere 20 R, emerget aggregatum 10 Q † 20 R; Item ex 12 C, ad 20 QQ, fit summa 20 QQ † 12 C &c. & semper summa est numerus compositus. *Quãdo numeri denominati fuerint denominationis diuersæ.*

Demonstratio est, quia additio sincera sine signo, fit inter homogenea; proinde cum hæc heterogenea sint, nequeunt inuicem addi, hoc est addi vnum ad alterum, nisi per signum †. Idem autem intelligendum est, si sit opus addere numerum nudum ab omni charactere, ad numerum charactere affectum, & è contra, vt ex 12, ad 20 Q, fit summa 20 Q † 12, & ita de singulis. *Demõstratio.*

Verùm si debet fieri additio inter numeros compositos, diminutos, & mistos, siuè simplicis ad compositum, diminutum, & mistum, siuè compositi, ad compositum, diminutum, & mistum; additio fieri debet inter illos, qui sunt eiusdem appellationis: quòd si non essent eiusdem appellationis, absoluetur additio eodem signo †. *Præceptũ.*

Si sit opus addere ad 8 R † 5, numerum 4, fiet summa 8 R † 9. Vel ad 8 R † 5, addere debeamus 4 R; fit summa 12 R † 5, si verò ad numeros compositos debeamus addere numeros compositos, per quos intelligo tàm compositos propriè, quàm diminutos, & mistos, vt ad 20 C † 5 Q, sit opus addere 10 C † 7 Q. Aduertendum est, num ipsi numeri addendi appellationis eiusdem, afficiantur signis †, vel —. Etenim si eadem signa ipsis præfigentur, absoluetur additio, addendo similia similibus, vt ex 10 C † 7 Q, ad 20 C † 5 Q, fit summa 30 C † 12 Q, cuius demonstratio infra patebit. Item ex 10 Q † 4 R, & 8 Q † 2 R, fit summa 18 Q † 6 R. Quòd si non sint affecti numeri eiusdem characteris, signis eisdem; sed vnus signo †, alter verò —: in huiusmodi casu, habendus est præ oculis, horum signorum Algorithmus, tàm ad additionem, quàm ad cæteras operationes ritè instituendas. Cæterùm cùm in compositis *Exemplũ.*

non intercedit, nisi signum †, omnes necesse est eodem signo afficiantur, sicuti de diminutis quoad signum ⟞, secus autem de mistis.

Algorithmus signorum ✠ & ⟞.

Algorithmus signorũ †, & ⟞ necessarius.

HIc igitur Algorithmum horum signorum aggrediemur, vtpotè necessarium ad Algebricas operationes instituendas, & ab additione ipsorum exordiemur. Tùm quia, simplicior operatio cùm sit, omnibus alijs præmittenda est. Tùm quia numerorum denominatorum hic circa additionem versatur tractatio, quæ sine additione signorum †, & ⟞ nequit absolui.

Signorum ✠, & ⟞ Additio.

† ad † additur, & fit †. Hoc est, plus ad plus additur, & fit plus.

⟞ ad ⟞ additur, & fit ⟞. Hoc est, minus ad minus additur, & fit minus.

† ad ⟞ subtrahitur, & notatur maius. Hoc est, plus ad minus subtrahitur, & notatur maius.

⟞ ad † subtrahitur, & notatur maius. Hoc est, minus ad plus subtrahitur, & notatur maius.

De subtractione agemus in sequentibus, videlicet, tàm signorum †, & ⟞ quàm Potestatum.

Declarantur superiora præcepta, & exẽplis illustrantur.

Si itaq; instituenda est additio inter numeros compositos, quibus interponuntur diuersa signa †, & ⟞, atq; numeri eiusdem appellationis, diuersis signis afficiantur; habenda est ratio additionis signorum prædictorum.

Exem-

Exempla Additionis signorum +, & —.

18Q+8R	30C—35Q	12Q+6R	16C—5Q
15Q—2R	14C+10Q	14Q—8R	28C+10Q
33Q+6R	44C—25Q	26Q—2R	44C+5Q

15C+12Q—10R	30C+15Q+10R
14C—16Q+4R	40C—7Q+0
29C—4Q—6R	70C+8Q+10R

12QC+10QQ+0C—4Q+2R
20QC+15QQ+15C+8Q—4R

32QC+25QQ+15C+4Q—2R

14CC+6QC+8C+16Q—15R—18
10CC+12QC—5C+19Q—9R—15

24CC+18QC+3C+35Q—24R—33

Itaq; commutatur operatio additionis in subtractionem; subtrahitur enim minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur signum maioris numeri, à quo facta est subtractio. Demonstratio signorum +, & — facilis est, & quidem quoad signa +, & +, non est cur verba faciamus.

Commutatur operatio additionis in subtractionẽ, &c.

Demonstratio.

Perspicuum est etiam rectè additionem institui, addendo partes partibus: *Nam idem est partes addere partibus, & aggregata simul colligere, idem est inquam, ac totum addere toti.*

Propositio.

Sic etiam si + addatur ad + fieri +. Etenim *Si fuerint plures numeri in quotlibet partes diuisi, numerus factus ex aggregatione integrorum, æqualis est numero facto ex additione aggregatorum ex partibus. Quòd si fuerit vnus indiuisus, diuisus alter,*

Additio + ad +. Propositio.

alter; Ille qui fit ex indiuiso, & toto diuiso, aequalis est illi, qui fit ex additione indiuisi, ad alterutram partium, plus altera parte.

Exẽplum. Si sint e. g. duo numeri, quorum vnus 75, diuisus in duas partes 60, & 15, alter 16, diuisus in duas partes 10, & 6, si 6, addatur ad 15, fiunt 21, si 10, ad 60, fiunt 70, horum summa est 91, quanta fit ex 75, & 16, simul iunctis. Quòd si vnus diuisus fuerit, puta 75, in 60, & 15, alter indiuisus, nimirum 6, additis 6, ad alterutram partium, puta vel ad 60, vel ad 15, fit summa 60 + 21, vel 66 + 15, nempe 81; Idem autem numerus habetur si ad 75, addantur 6.

$$\begin{array}{l} 60+15 \\ 10+\ \ 6 \\ \hline 70+21 \\ 21 \\ \hline 91 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ 6 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 75 \\ 16 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \hline 91 \\ \hline 60+15 \\ \qquad 6 \\ \hline 60+21 \text{ hoc est } 81. \\ 60+15 \\ 6 \\ \hline 66+15 \text{ hoc est numerus idem } 81. \end{array}$$

Additio — ad —. Ita etiam de additione — ad —: & nimirum rectè institutam esse, addendo minores minoribus, & maiores maioribus. *Propositio.* *Aggregatum enim differentiarum addendarum aequale est differentia summa ex minoribus, à summa ex maioribus.*

Propositio. Sic etiam si ad — addatur —, fieri —. *Quandoquidem differentiae numerorum, si inuicem addantur, summa aequalis est aggregato maiorum, minus aggregato minorum.*

Sint

Sint e.g. 70 — 15, & 40 — 12, residuũ illud valet 55, istud 28, quorum summa 83, si verò addantur 12, ad 15, fient 27, si verò 40, ad 70, fient 110, horum autem differentia est 83, vt perspicuum est, quanta est summa ex 55, & 28.

70 — 15
40 — 12
---
110 — 27
27

83

55
28

83

Quòd verò si sint †, & —, fieri debeat subtractio, &c. & hoc modo rectè institutam esse operationem, subtrahendo eos, qui afficiuntur signis diuersis, &c. patet ex eo quia *Si sint duo numeri inæquales, quorum differentia subtrahi debet ab aliquo numero vtcunq; diuiso, idem est minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium ipsius numeri diuisi subtrahere, & maiorem alteri parti coniungere, & huic aggregato reliquum illum numerum addere, ac est differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuisum.*

Additio † ad —, & — ad †.

Propositio.

Sint 60 † 40, & 32 — 15, facta additione consurgit 92 † 25, idem est enim addere 32, ad 60, & summæ 92, addere 25, interuallum, seu differentiam inter 40, & 15, ac est numero 100, composito ex 60, & 40, addere 17, differentiam inter 32, & 15; vtroq; modo consurgent 117, pro summa quæsita.

60 † 40
32 — 15
---
92 † 25
25

117.

Fieri autem signum †, vel prout affectus est numerus maior, à quo fit subtractio, ex eo liquet: quòd *Si fuerit numerus quispiam vtcunq; diuisus, & ei addatur numerorum duorum differentia, summa æqualis erit aggregato ex alterutra parte numeri diuisi, & maiori ex duobus numeris differentibus, vnà cum differẽtia inter alteram partem numeri diuisi, & numerum minorem ex duobus differentibus.*

Propositio.

Hæc

Exemplis declaratur superior doctrina.

Hæc autem illustrari possunt exemplis. Sint duo numeri, compositus vnus 70 + 20, diminutus alter, scilicet 40 — 12: si ex 20, subtrahantur 12, remanent 8: si ad 70, addantur 40, fiunt 110: horum summa est 118, quanta resultat ex additione numeri 28, quo differt 40, à numero 12, ad 90, numerum conflatum ex 70, & 20. Vel si ad 20, addantur 40, fiunt 60: si ex 70, subtrahantur 12, remanent 58; quibus additis ad 60, fiunt 118: dum enim addimus 40, ad 70 + 20, plus addimus, quàm oporteat; siquidem tantùm addere debemus 28, valorem illius residui 40 — 12,

70 + 20
40 — 12
70 + 40 + 20 — 12
hoc est 118.

minuendus est igitur numerus 70 + 20, numero 12, quod fit subducendo 12, ab eius parte 20; nam facta subtractione, is, qui superest, puta 8, si addatur ad 70, fiunt 78, quibus si addantur 40, fiunt 118; vt videre licet in primo paradigmate. Sic & in secundo, dum subtrahitur 12, ex 70, &c. minuitur enim 70 + 20, numero 12, subtrahendo 12, de 70. &c.

70 + 20
40 — 12
40 + 20 + 70 — 12
hoc est 118.

Demonstratio quoad potestates.

Quòd attinet ad Potestates, etiam perspicuum est, rectè fuisse operationem institutam. Siquidem addere numerum Potestatum ad numerum Potestatum eiusdem appellationis, nihil est aliud, quàm addere productum vnius numeri in alterum, ad productum alterius numeri in eundem, per quem prior ille fuit multiplicatus.

Propositio.

Sed idem est multiplicare numerum per numerum, & alterum numerum per eundem numerum in quem ille ducebatur, & productos numeros in vnam summam colligere: idem est inquam, ac numeros diuersos illos colligere simul, summamq; ducere in eundem numerum, per quem fiebat communis multiplicatio; summæ enim sunt inuicem æquales.

Vt si sint numeri 15, & 20, qui ducantur in 5, si 15, ducantur in 5, fiunt 75, si in 20, fiunt 100, horum summa est 175, modo si ad 15, addantur 20, fiunt 35, qui si ducantur in 5, fiunt quoque 175.

Exemplo illustratur superior doctrina.

20	15
15	5
35	75
5	20
175	5
	100
	75
	175

Demonstratio est; quia *Numerus planus factus sub aliquo numero diuiso, & altero indiuiso, æqualis est numeris, qui fiunt ex multiplicatione eiusdem indiuisi, & qualibet parte diuisi.* *Propositio*

Sit numerus 35, diuisus in partes 15, & 20, alter autem indiuisus 5, numerus planus, qui continetur sub 35, & 5, nempe 175, æqualis est numero 75, facto ex parte 15, & indiuiso 5, vna cum numero 100, facto ex 20, in 5. *Exẽplo declaratur.*

A45 D10 E5B C4

F240

G180 H40 I20 K

Sint duo numeri AB, & C, ille quidem diuisus in partes AD, DE, EB, hic autem indiuisus; & C multiplicans AB, producat F, multiplicans autem AD, producat GH, multiplicans DE, producat HI, multiplicans EB, producat IK; Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, siquidem C, multiplicans AB, produxit F, ob id AB, metietur F, per C, nimirum AB, pars erit ipsius F, denominata à C, neq; dissimili argumento AD, pars erit ipsius GH, denominata à C, sic DE, ipsius HI, & EB ipsius IK; proinde quæ pars est AB, ipsius F, eadem erit AD, ipsius GH, & ita de cæteris. Sed quæ pars est AD, ipsius GH, eadem est totus AB, totius GK; per ea, quæ ad proposit. 5. lib. 7. ostenduntur; pro- *De nõstratio.*

inde quæ pars est AB, ipsius F, eadem erit AB, ipsius GK, ergo F, & GK, æquales erunt.

Additionis examen duplex est, scilicet per subtractionem, & per resolutionẽ in numeros absolutos, &c.

Examen autem additionis, num videlicet quis eam ritè, citraq; errorem exercuerit duplici pacto fieri potest. Primò per subtractionem, ad eum modum sanè, quo fit in numeris vulgaribus. Secundò resoluendo numeros addendos Potestatum, iuxta aliquam radicis staturam estimationem, in numeros absolutos, & hos simul addendo, vel vnum ab altero subtrahendo, prout à signo †, vel — afficitur; mox resoluendo numeros Potestatum collectæ summæ. Signum autem ritè aliquem operatum fuisse erit, si numeri collectæ summæ resoluti, fuerint æquales numeris addendis resolutis simul sumptis. Esto exemplum. Videndum sit, num ex additione 8Q†4R, ad 10Q—2R, proueniat summa 18 Q† 2 R: resoluantur numeri addendi in numeros absolutos, iuxta aliquam radicis æstimationem, v. g. 3. erit enim 8Q†4R idem, quod 72 † 12, & si resoluantur 10 Q—2 R, erit 90 — 6, quorum summa est 162†6, hoc est 168; huic autem debet esse æqualis numerus 18Q †2R, in numeros absolutos redactus: & ita est; siquidem facta resolutione, erit summa 162†6, vt patet.

8 Q	†	4 R
10 Q	—	2 R
18 Q	†	2 R
72	†	12
90	—	6
162	†	6

De numeris surdis.

Quoad numeros autem surdos, & irrationales, nihil amplius aduertendum occurrit, præter ea, quæ traduntur de logistica numerorum surdorum vulgarium. Itaq; si numeri irrationales, per quos numerantur potestates, fuerint æquales, addantur, vt illi; nempè facta multiplicatione per 2, redactũ ad radicis naturam, v. g. ad ℞Q10R, debeat addi ℞Q 10R, fiet summa ℞Q40R. Sic si fuerint radices cubicæ, &c. Vt si ad ℞C30Q, addi debeat ℞C30Q, fiet summa ℞C240Q; numerus enim 2, redigi debet ad naturam illius radicis, de qua loquimur.

Quãdo numeri sunt inæquales commensurabiles quid agendum.

Quòd si numeri sint inæquales commensurabiles; agatur, vt de ipsis suo loco dictum est;

vide-

videlicet ducatur vnus in alterum, & producti numeri extrahatur radix quadrata, quæ duplicetur; hoc autem duplum addatur summæ quadratorum, si loquamur de radicibus quadratis. Huius radix quadrata erit summa Potestatum, &c. Exemplum. Ad ℞Q20R, addatur ℞Q5R, fiet summa ℞Q45R; & si ad surdum denominatum addere deberemus numerum non surdum denominatum; vt ad ℞Q5Q, addere oporteat 3Q, fiet additio per signum †, & proueniet ℞Q5Q†3Q, & ita de reliquis. Item ex ℞Q8R, ad ℞Q18R, fiet summa ℞Q50R, cum ℞Q8, & ℞Q18, sint commensurabiles.

Cum autem radices non fuerint commensurabiles, absoluetur item additio, beneficio signi †, vt ad ℞Q7R, sit opus addere ℞5R, fiet summa ℞7R†℞5R. Item ex ℞C15R, ad ℞C6R, fiet summa ℞C15R†℞C6R. Item ex ℞36R ad ℞12Q fiet summa ℞36R†℞12Q siue ℞12Q†℞36R.

Quādo radices fuerint commensurabiles.

Verùm radices commemoratæ poterunt esse bifariam incommensurabiles. Primò quoad numerum; quando nimirum (loquendo de radicibus quadratis) numeri non sunt in proportione, vt numerus quadratus, ad numerum quadratum; & si loquamur de radicibus cubicis, non fuerint in ratione tanquam numerus cubus, ad numerum cubum, &c.

Primus incommensurabilitatis modus.

Secundò, quando dignitates fuerint diuersæ; vt si quidam numerus surdus afficiatur cubo, alter verò Q&c. in huiusmodi casu absoluitur additio beneficio signi † vt ex ℞5Q, ad ℞20R, fit summa ℞5Q†℞20R, & ex his colligitur methodus additionis numerorum compositorum irrationalium denominatorum.

Secundus modus incommensurabilitatis.

At verò hinc facilè constabit additio numerorum simplicium, qui intra parenthesin clauduntur; & radices vniuersales simplices dicuntur; obseruatis enim ijs, quæ diximus, facili negotio operationem expediemus. Vt si ad ℞(12C) addere debeamus 6R, fiet summa 6R†℞(12C) Item ex ℞(7QC) ad ℞(12C) fit ℞(7QC†12C) & si ad ℞(15C), addere oporteat ℞(5R) fit summa ℞(15C†5R)

Additio numerorum simplicium, qui intra parenthesin clauduntur.

Insuper ex ℞ (13C) ad ℞ (17C) fit summa ℞ (13C†17C) & sic de reliquis incommensurabilibus simplicibus vniuersalibus radicibus. Vt ex ℞C (18Q) ad ℞C (15R) fit ℞C (18Q†15R) & ex ℞C (18QC) ad ℞C (15R) fit ℞C (18QC†15R) & ex ℞C (20Q) ad ℞C (15R) fit ℞C (20Q†15R) & ex ℞C (18QQ) ad ℞C (7QQ) fit ℞C (18QQ†7QQ).

Quando fuerint commensurabiles quid agendum.

Si verò fuerint commensurabiles obseruentur præcepta, quæ traduntur de huiusmodi numeris surdis in generali; si fuerint inquam commensurabiles, tàm quoad numerum, quàm quoad Potestates. Ad ℞ (12R) addenda sit ℞ (3R) fiet sũma ℞ (27R) Item ad ℞ (32R) addere oporteat ℞ (2R) fiet summa ℞ (50R) Insuper ex ℞ (8Q) ad ℞ (18Q) fiet summa ℞ (50Q) & ita de cæteris radicibus, nempe Cubicis, Quadrato-quadraticis, &c. obseruatis præceptis consentaneis earum naturis.

Exemplis declaratur superior doctrina.

Præterea ex † ℞ (45C) ad — ℞ (5C) fit summa † ℞ (20C) etenim † ad — subtrahitur, remanetq; signum numeri maioris. Item ex ℞C (81Q) ad ℞C (24Q) fit summa ℞C (375Q) etenim communis diuisor est 3, qui in 81, continetur viginti septies, & in 24, continetur octies; at verò ℞C, numeri 27, est 3, & numeri 8, est 2, horum summa est 5, huius cubus 125, qui ductus in 3, communem diuisorem (hæc omnia iubent fieri præcepta numerorum irrationalium) facit 375. Præterea ex ℞C (20R) ad — ℞C (20R) fit summa 0, Item ex † ℞C (500R), ad — ℞C (256R) fit summa † ℞C (4R) etenim † & — in Additione subducuntur, remanetq; signum maioris numeri. Communis autem diuisor est 4, qui numerum 500, metitur per 125, & numerum 256, per 64, modo ℞C, numeri 125, est 5, & numeri 64, est 4, quo ablato ex 5, remanet 1, cuius cubus est 1, qui ductus in 4, communem diuisorem producit 4, &c. fit ergo summa † ℞C (4R).

Quando sunt illi numeri surdi, qui radices vniuersales composita dicuntur, quid agendum.

Porrò si fuerint illi numeri surdi, qui radices vniuersales compositæ dicuntur, obseruentur earum leges citra charactêres potestatum traditæ, & ijdem tribuantur charactêres summis collectis.

Pri-

Primò videndum est, num sint similes natura, & numero; deinde procedendum, vt diximus, de numeris surdis suo loco, &c. nempè addantur iuxta radicis naturam, vt suo loco docuimus.

Primò, videndum, num sint similes natura, & numero.

Secundò obseruandum num sint commensurabiles an non, si non extiterint commensurabiles, addantur signo †, si fuerint commensurabiles, obseruentur præcepta additionis Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. *Exempla.* Ex ℞ (7Q†5R) ad ℞ (3Q†2R) fit summa ℞ (7Q†5R) † ℞ (3Q†2R) ita si ad ℞ (5Q†3R) addatur ℞ (3Q†5R) fiet summa ℞ (5Q†3R) † ℞ (3Q†5R) sunt enim incommensurabiles.

Secūdo obseruandum num sint commensurabiles.

At verò si commensurabiles fuerint, obseruandum præcepta Additionis, Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. Ita ex ℞ (2Q†2R) ad ℞ (32Q†8R) fiet summa ℞ (50Q† 18R) cum sint commensurabiles. Insup er ex additione ℞ (12Q†8R) ad ℞ (3Q†2R) fiet summa ℞ (27Q†18R) etenim si 12 per 3 diuidatur, fit quotiens 4, numerus quadratus, si 3, per 3 diuidatur, fit quotiens 1, Radix autem quadrata numeri 4, est 2, & 1, est 1, harum radicum summa est 3, cuius quadratum est 9, quod si in 3, communem diuisorem ducatur, producitur 27; huic autem numero si addatur character Q, fiet summa 27Q. Deinde ipsorum 8, & 2, communis diuisor est 2, qui diuidens 8, facit quotientem 4, diuidens 2, facit 1; at ℞Q, numeri 4, est 2, & 1, est 1, quæ inuicem collectæ faciunt 3, huius quadratum est 9, quod si ducatur in 2, communem diuisorem producitur 18, cui apposito eodem charactere, fit summa 18R, hæ summæ additæ inuicem per signum †, & inclusæ intra parenthesin, præposito tamen signo eodem radicali, faciunt summam quæsitam, hoc modo ℞ (27Q†18R).

Quando fuerint cōmensurabiles.

Explis explicantur, quæ superius dicta sunt.

Hæc autem operatio enucleatur numeris absolutis hoc modo. Ad veritatem ostendendam supponamus 1 R, pretium esse 2, quadratum erit 4, Itaq; 12Q, pretium erit 48, & 8R, erit 16, horum summa, vt vides est 64, cumq; includan-

48
16
—
64
8

Superior operatio numeris illustratur.

tur

tur intra parenthesim præposito signo radicali quadrati; extrahatur ℞Q, estq; 8; Item 3Q, erunt 12; atq; adeo 2R, erunt 4, horum summa est 16, cuius ℞Q est 4, quæ addita ad 8, vnitates superius seruatas facit 12. Modo explicemus summam illam ℞(27Q†18R) cum 1R pretium sit 2, certè 27Q, valebunt 108, & 18R, valebunt 36, horum summa est 144, cuius ℞Q est 12, vt oportebat.

Exempla.

Præterea ad ℞(512Q—150R) addatur ℞(72Q†150R) fiet summa ℞(968R). Namq; communis diuisor erit numerus 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 512, metitur per 64, & ℞Q numeri 9, est 3, & numeri 64, est 8, horum summa est 11, huius quadratum est 121, quod ductum in 8, communem diuisorem facit 968Q, sed in addendis †, & — fit subtractio; Si ad — 150R, addantur † 150R fiet 0, ac proinde summa erit ℞(968Q). Item si ad ℞(216C† 63R) addantur ℞(24C†28R) & ℞(54C†175R). Communis diuisor numerum, qui C, afficiuntur est 6, qui 216, metitur per 36, & 24, per 4, & 54, per 9. Horum radices quadratæ sunt 6, 3, 2, quorum summa 11, cuius quadratum est 121, quod si ducatur in 6, communem diuisorem; producitur 726C. Numerorum autem, qui R afficiuntur, communis diuisor est 7, qui 63, metitur per 9, & 28, per 4, & 175, per 25. Horum radices quadratæ sunt 3, 2, 5, quarum summa est 10, quæ ducta in 7, communem diuisorem facit 700R; Atq; adeo fiet summa intra parenthesim ℞(706C†700R).

Superior doctrina declaratur exemplis.

Poterunt autem explicari hæc omnia; quemadmodum alia superiora exempla nos enucleauimus. Vt si supponamus 1R valorem esse ℞2, certe 1Q, valebit 2, itaq; ℞(512Q) valebit 32, vt ℞(72Q) valebit 12, horum summa est 44; at verò si ℞(968Q) explicetur secundum eandem estimationem valebit quoq; 44; Si supponamus 1R, valorem esse ℞3, quadratum erit 3, quo ducto in 512, fit 1536, item ducto in 72, fit 216; ergo ℞(512Q) valebit ℞1536, & ℞(72Q) valebit ℞216, si verò in vnam summam colligantur, fit ℞2904; at verò si ℞968, multiplicetur

Superiora exēpla numeris illustrantur.

cetur

cetur per 3, pretium quadrati, fiet 2904; atq; ℞ (968 Q) valebit ℞ 2904.

Numerorum Denominatorum Subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

Vel facienda est subtractio numeri denominati ab alio numero eiusdem appellationis, vel diuersæ. Rursus, aut numeri sunt solitarij, & simplices, vt 10R, 6Q &c. vel compositi, per quos intelligo tàm propriè compositos, quàm diminutos, & mixtos. Et quicunq; sint, aut numerantur numeris absolutis, aut irrationalibus. *Subtractionis præcepta.*

Si fuerint appellationis eiusdem, subtrahatur numerus à numero, & reliquo idem tribuatur character; vt à 10R subtrahendæ sint 4R, remanebunt 6R, à 12Q, subtrahi debent 4Q, remanebunt 8 Q, &c. *Quando sunt appellationis eiusdem.*

Demonstratio facilis est. Cum enim subtractio numerorum sit interualli, differentiæq; duorum numerorum acceptio; alio modo certè fieri non potest, quàm vnum ab alio auferendo *Differentia duorum numerorum siquidem, æqualis est maiori, ablato minori, siue minùs ipso minori.* *Demõstratio.* *Propositio.*

Si verò sint appellationis diuersæ, absoluetur subtractio beneficio signi —. Itaq; si abs 12Q, subtrahere debeamus 4R, fiet residuum 12Q—4R; Si abs 15C, subtrahenda sint 9Q, remanebunt 15C—9Q.

Demonstratio liquet. Etenim, quæ sunt heterogenea subtrahi non possunt nisi per signum —, constat autem hæc esse diuersæ naturæ; proinde necesse est, vt ita subtrahantur. *Quando sunt appellationis diuersæ.*

Quòd si numeri fuerint Compositi, Diminuti, & Mixti, habenda est præ oculis ratio signorum +, & —. *Demõstratio.*

Signorum ✠, & — Subtractio.

✠ à ✠ Subtrahitur, & remanet ✠, superiori termino existente maiori; alioquin remanet —.

— à — Subtrahitur, & remanet — superiori termino existente maiori; alioquin remanet ✠.

✠ à — Additur, & remanet —.

— à ✠ Additur, & remanet ✠.

Exemplis illustratur superior doctrina.

Quapropter si à 12Q✠8R, subducere debeamus 8Q✠4R, remanebunt 4Q✠4R. Item si à 12Q—4R, subducere debeamus 4Q—3R, remanebunt 8Q—1R.

Quando in subtractione alter numerorũ habet signũ ✠, alter verò —.

At verò si in subtractione alter numerorum habuerit signum ✠, alter verò —, fiat iuxta præcepta signorum ✠, & — superius tradita; Itaq; hoc totum exemplis declarare iuuabit.

16Q✠4R	24Q✠4R
7Q—3R	15Q—6R
9Q✠7R	9Q✠10R
12Q—6R	14Q—2R
4Q✠3R	6Q✠4R
8Q—9R	8Q—6R

Et eodem pacto procedendum est in Plurimonijs.

16QC✠6QQ—4Q	14QQ✠12C—7Q
4QC✠4QQ✠2Q	5QQ—4C✠2Q
12QC✠2QQ—6Q	9QQ✠16C—9Q

Itaq;

Itaq; in subtractione commutatur species operationis; nimirum fit additio, summæq; tribuitur signum numeri superioris, à quo fieri debet subtractio.

In subtractione commutatur species operationis.

Hæc omnia facili negotio demonstrantur. Rectè operationem institui, cum eisdem signis † afficiuntur numeri, subtrahendo partes à partibus, ideò patet; quia *Si duo numeri vtcunq; fuerint diuisi, differentia totorum numerorum, æqualis est partium vnius numeri simul sumptis, à partibus alterius simul sumptis, differentijs. Seu idem est totum à toto subducere, ac est partes à partibus, & differentias in vnum colligere.*

Demonstratio.

Exempli gratia sint duo numeri diuisi 78, & 55, ille quidem in duas partes 60, & 18, hic autem in 40, & 15, sit diuisus. Si subtrahamus 15, & 18, remanent 3. Si ex 60, subducantur 40, remanent 20, horum somma est 23, tanta est autem differentia inter 78, & 55, vt patet.

Exemplo declaratur superior doctrina.

60 ✠ 18	
40 ✠ 15	
20 ✠ 3	
	78
	55
	23

Retinendum autem esse idem signum ✠, siue —, prout numeri efficiuntur, ex eo constat; quòd *Si fuerint duo numeri vtcunq; diuisi; atq; adeo intercedat signum ✠: differentia totorum æqualis est differentiarum partium vnius numeri à partibus alterius, aggregato, vt patet ex dictis. Seu differentia totorum, æqualis est aggregato differentiarum, quibus partes vnius differunt à partibus alterius.*

Retinendum esse idem signum †, vel —. Propositio.

Rursus *Si duæ sint differentiæ, vna quidem duorum numerorum, alia verò duorum aliorum: idem est duos numeros differentes, à duobus numeris differentibus, singillatim subducere, & differentiam minorum emergentem, à maiorum differentia subtrahere; est idem inquam, ac est differentiam duorum, ab aliorum duorum differentia detrahere.*

Retinendum signum —.

Vt si sint 60 — 10, & 40 — 4, subtractis 4, ex 10, remanent 6, item subductis 40, ex 60, remanent 20, residuum erit 20 — 6, nempe 14, quantum planè residuum fit subtractis 36, ex 50.

60 — 10	50
40 — 4	36
20 — 6	14

60 — 4	56
40 — 10	30
20 + 6	26

Quando terminus superior afficitur signo —, estq; minor inferiori affecto signo itidem —, remanere signũ +, ostenditur.

Quòd si terminus superior affectus signo —, minor sit inferiori itidem affecto signo —, remanere signum +, inde constat; quia *Si sint duo numeri differentes, & alij duo itidem differentes, ita tamen, vt terminus minor inferior, maior sit termino minori superiori; differentia, qua differunt differentia numerorum, æqualis est differentia maiorum numerorum, plus differentia minorum.*

Vt si sint 60 — 4, & 40 — 10, adeo vt ex 60 — 4, subtrahere debeamus 40 — 10, si ex 10, subducamus 4, residuum 6, addamus ad 20, differentiam inter 60, & 40, fit residuum quæsitum 20 + 6, nempè 26, quantum remanet subtractis 30, ex 56.

Declaratur magis superior doctrina.

Dum enim subtrahimus 40, ex 60, plus subducimus quàm oporteat; & numerum supponimus maiorem, à quo debeat fieri subtractio; ille quidem subtrahendus minui debet numero 10, ille verò numero 4. Hoc autem idem est; ac loco subtrahendi 4, ex 60, subducere 4, ex 10, itaut non amplius numerus 40, minuatur numero 10, sed potius 6, vt ex 60, subtrahantur 34, remaneant 26, quod est residuum illud 6, addere ad 20, differentiam inter 60, & 40.

Retinendum esse intercedens signum —. Propositio.

Retinendum autem esse intercedens signum —, cum terminus superior maior extiterit, liquet ex eo quia *Si sint duo numeri differentes, & itidem alij duo differentes; differentia istarum differentiarum æqualis est differentia maiorum numerorum è differentibus, minus differentia minorum.*

Quòd

Quòd ad signa +, & — attinet; nempè quando subtrahitur differentia duorum numerorum à numero diuiso, vel è contra, retinendum esse signum superioris termini, &c. facilitate eadem ostenditur; etenim *Si fuerit numerus vtcunq; diuisus, & duo numeri differentes, quorum differentia subtrahi debet à numero illo diuiso; interuallum inter illorum duorum numerorum differentiam, & numerum diuisum, æquale est differentiæ numeri maioris è duobus differentibus, ab vna parte numeri diuisi, plus aggregato ex alterius parte, & altero è duobus numeris differentibus, nempe minori.* *Propositio.*

Non dissimili modo procedendum erit, quando ab aliqua numerorum differentia subtrahi debet, numerus vtcunq; diuisus in duas partes. Exemplum esto. Sint duo numeri 60 + 10, & 40 — 7, adeo vt 40 — 7, subducere debeamus ex 60 + 10, remanebit 20 + 17, si nimirum addamus 7, ad 10, vt fiat 17, & si 40, subtrahamus ex 60, vt remaneat 20, fiatq; residuum 37, quantum fit si 33, numerus æquipollens residuo illi 40 — 7, subtrahamus ex 70, numero, qui æquipollet 60 + 10. quod potest ex dictis facilè intelligi. Dum enim subducimus 40, ex 60, subtrahimus, plusquam oportet; necesse est igitur id, quod supererat, restituere illi, vnde facta est subtractio; quod vtiq; præstamus addendo id alteri parti numeri diuisi, &c. *Exemplum ad superius allata explicanda.*

$$\begin{array}{r} 60 + 10 \\ 40 - \ \ 7 \\ \hline 20 + 17 \\ 70 \\ 33 \\ \hline 37 \end{array}$$

Quantum autem ad Potestates ex eo liquidò constat, quòd *Si duo numeri in eundem numerum ducantur, & productum vnum minorem scilicet à maiori subtrahamus; residuum æquale est numero, qui fit, si subtracto minori, ex maiori duorum illorum, qui fuerant multiplicati, & qui relinquitur in illum eundem numerum tertium ducatur.* *Quoad potestates.*

Sint numeri A, B, qui multiplicati per C, producant D, & E, quorum differentia sit F; Dico numerum F, æqualem esse I, numero, qui fit ex H, differentia inter A, & B, in C; *Demonstratio.*

etenim cum C, multiplicans A, & B, producat D, & E, erit proportio D, ad E, quæ A, ad B; ergo, vt B, ad A, ita E, ad D, & diuidendo [a], vt B, minus A, ad A, ita E, minus D, ad D. Hoc est, vt H, ad A, ita F, ad D, seu, vt F, ad D, ita H, ad A; ergo permutando [b], vt F, ad H, ita D, ad A; sed D, ad A, habet rationem, vt C, ad G vnitatem, nam C, multiplicando A, produxit D; ergo F, ad H, habebit rationem, vt C, ad vnitatem G; sed vt C, ad vnitatem, ita I, ad H, nam C, multiplicando H, produxit I; ergo erit I, ad H, vt F, ad H; quamobrem I, & F, erunt inter se æquales, quod erat ostendendum. Constat autem Potestates esse numeros, in quos duci intelliguntur ij, per quos numerantur.

H 20

5

I 100

A 30 B 50

C 5 G Vnitas

D 150 E 250

F 100

a 17. quinti.

b 16. quinti.

Subtractionis examẽ, bifariã institui potest primò per additionẽ, secundò per resolutionẽ in numeros absolutos.

Subtractionis examen duobus modis institui potest; primò etenim comprobari potest subtractio per additionem, vt fit in numeris absolutis.

Secundò comprobatur commutando numeros denominatos in numeros absolutos; etenim facta hac resolutione, si numeri subtracti, & reliqui, vna simul collecti, fuerint æquales numeris, à quibus facta est subtractio, signum est nullum commissum esse errorem in operando. Exemplum. Subtrahamus 4Q + 6R, ex 18Q + 10R, remanebunt 14Q + 4R, idq; num verum sit dignoscemus. Primò per additionem addendo nempè 4Q + 6R, ad 14Q + 4R; namq; si fuerit summa æqualis superiori numero, à quo facta est subtractio, rectè operatio instituta erit.

Declaratio per exẽpla.

Secundò resoluantur 18Q + 10R, in numeros absolu-

tos,

tos, supposito 1R, pretio 2; erit 72+20, idem quod 18Q+10R. Deindè resoluantur 4Q+6R, & erunt 16+12, facta subtractione, remanent 56+8, seu 64, modo resoluamus 14Q+4R, & fiunt 56+8, seu 64. Dicendum ergo optimè operatum fuisse Analystam asserentem relinqui 14Q+4R, subtractis 4Q+6R, ex 18Q+10R.

Secundum subtractionis examẽ.

18Q	+10R
4Q	+ 6R
14Q	+ 4R
4Q	+ 6R
18Q	+10R

Numeri denominati, dum numerantur per numeros irrationales.

Reliquum est, vt agamus de numeris denominatis irrationalibus, seu de potestatibus numeratis per numeros irrationales, tàm simplices, quàm compositos. Sed facilè cognoscitur methodus obseruanda, ex ijs, quæ traduntur de huiusmodi numeris citra potestatum characteres. Quamobrem si radices fuerint simplices, fuerintq; eiusdem appellationis, & extiterint commensurabiles, fiat subtractio iuxta numeros irrationales simplices. Itaq; si ex ℞20R, subtrahere debeamus ℞5R, remanebit ℞5R, si ex ℞50Q, subtrahi debet ℞2Q, remanebit ℞Q32Q, & sic de reliquis, &c.

Quando fuerint incommensurabiles.

Cum fuerint incommensurabiles fit subtractio per signum —. Vt ex ℞30R, si subtrahimus ℞20R, remanebit ℞30R—℞20R, eodem pacto si fuerint numeri denominati diuersæ appellationis, vel absoluti. Quod si radices fuerint Cubicæ, Quadrato-quadraticæ, &c. obseruentur earum præcepta de numeris surdis. Et hinc patet quid agendum in numeris irrationalibus compositis; sic etiam de radicibus vniuersalibus, &c. De his autem supra de additione tractantes loquuti sumus; siuè sint vniuersales simplices, siuè compositæ; obseruandum enim vtrum sint commensurabiles; quemadmodum de additione dicebamus; & expedietur subtractio iuxta leges numerorum irrationalium in generali.

Exempla ad superiora præcepta declarãda.

Itaq; si ex ℞(10Q) subtrahantur 5R, fiet residuum ℞(10Q)—5R, cum enim prorsus sint incommensurabiles, non

non possunt subtrahi, nisi per signum —, Rursus ex ℞(12C) subducamus ℞(8Q) fiet residuum ℞(12C—8Q) & ex ℞(8C) si subtrahatur ℞(2R) remanet ℞(8C—2R) ex ℞(12C) si subtrahatur ℞(5C) remanet ℞(12C—5C) & sic de reliquis radicibus vniuersalibus simplicibus incommensurabilibus.

Quando fuerint cõmensurabiles.

Si fuerint commensurabiles, vt à ℞(12C) si subtrahere debeamus ℞(3C) emerget pro residuo ℞(3C) rursus à ℞(27C) si subtrahamus ℞(12C) remanebit ℞(3C) communis diuisor est 3, qui 27, metitur per 9, & 12, metitur per 4, horum autem radices quadratæ sunt 3, & 2; subductis autem 2, ex 3, remanet 1, cuius quadratum est 1, quod si ducatur in 3, communem diuisorem producit numerum 3, & ita de reliquis radicibus, iuxta earum naturam intelligendum est; Numeris autem absolutis hæc facilè declarari possunt.

Quando sunt composita vniuersales.

Si sint compositæ vniuersales, vel sunt commensurabiles, vel non; Si non sunt commensurabiles fiat detractio per idem signum —, vt ex ℞(15C+6Q) subtrahere debeamus ℞(12Q+4R) pro residuo emerget ℞(15C+6R) — ℞(12Q+4Q). Item ex ℞(40C+12R) subducere debeamus ℞(10QC+6R) & remanebit ℞(40C+12R) — ℞(10QC+6R) & ita de cæteris.

Quãdo numeri fuerint commensurabiles, qua arte sit instituẽda subtractio.

Quod si fuerint commensurabiles, fiat subtractio iuxta leges horum surdorum numerorum, &c. ex ℞(384C+72R) detrahatur ℞(150C+200R) & remanebit ℞(54C—32R) communis diuisor numerorum, qui charactere C, afficiuntur est 6, qui numeros 384, & 150, metitur per 64, & 25; quorum Radices quadratæ sunt 8, & 5; at ex 8, subductis 5, remanet 3, cuius quadratum est 9, quod ductum in 6, communem diuisorem, producit 54C: at verò numerorum, qui charactere R afficiuntur, est 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 200, metitur per 25; at radix quadrata numeri 9, est 3, & numeri 25, est 5, à quibus subtractis 3, remanet numerus 2, cuius quadratum est 4, quod ductum in 8, producit 32, si verò ex + subtrahatur —, remanet +,

ma-

maiori existente superiori numero. Sin autem remanet —, proinde remanebit ℞ (54C — 32R). Item ex ℞C (1512Q — 320R) subtrahatur ℞C (875Q — 40R) remanebit ℞Q (7Q — 40R). Numerorum enim charactere Q, affectorum communis diuisor est 7, qui 1512, metitur per 216, & 875, metitur per 125; at verò ℞C, numeri 216, est 6, & numeri 125, est 5; ex 6, subductis 5, remanet 1, cuius cubus est 1, ductus autem in 7, communem diuisorem producit 7, & fit 7Q; Numerorum autem R, affectorum communis diuisor est 5, qui 320, metitur per 64, & 40, metitur per 8; at verò numeri 64, est ℞C, numerus 4, & numeri 8, est 2; hac subducta ex 4, remanet 2, huius cubus est 8, ductus autem in 5, communem diuisorem facit 40, & ita fiet 40R, at si ex — subducatur —, remanet —, superiori termino existente maiori. Item ℞ (48C + 8Q) subtrahere debeamus ex ℞ (75C + 32Q) remanebit ℞ (3C + 4Q). Insuper ex ℞C (192Q + 432R) detrahenda sit ℞C (81Q + 250R) residuum erit ℞C (3Q + 2R).

Numerorum Denominatorum Multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

Eadem numerorũ distinctio in multiplicatione, quæ in cæteris operationibus.

EOdem pacto distinguendum est hic de numeris in multiplicatione, vt superiùs in Additione, & Subtractione dictum fuit. Ob id huiusmodi diuisiones non repetemus.

Multiplicatio numeri denominati per numerum absolutum.

Si multiplicari debet numerus denominatus per numerum absolutum, fiat multiplicatio, vt in numeris absolutis, productoq; idem character apponatur; prouenit enim numerus eiusdem appellationis. Vt si 10R, multiplicari debeant per 4, fiunt 40R.

Multiplicatio numeri denominati per numerum denominatũ.

Cum autem numerus denominatus per numerum denominatum multiplicatur, fiat multiplicatio, vt in numeris absolutis; producto verò tribuatur character, qui debetur summæ exponentium characterum numerorum, qui multiplicantur.

Vt

Vt multiplicare debeamus 6R, per 6R, fit productum 36Q, quoniam 1, exponens characteris R, si addatur ad 1, exponentem item ipsius R, facit 2, exponentem, cui debetur Q. Insuper multiplicemus 6Q, per 5R, fit productum 30C, quoniam exponentes multiplicatorum sunt 2, & 1, ex quibus coalescit 3, cui debetur C: & sic de reliquis.

Demõstratio quoad numeros.

Demonstratio quoad numeros patet. Cum enim tunc numerus numerum multiplicare dicatur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis; Vnde multiplicatio numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicãtium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium, ad vnitatem. Hoc aliter autem fieri non potest, quàm ducendo vnum in alterum, sic .n. indagatur numerus, qui ad alterutrum multiplicãtium, eam habet rationem, quã alter multiplicãtium ad vnitatẽ.

Demõstratio quoad characteres.

Propositio.

Quantum ad characteres; rectè nimirum institui operationem additione exponentium, multiplicando partes, ostenditur ex eo, quia *Si fuerint quatuor numeri, & qui fit ex primo in secundum ducatur in factum, ex tertio in quartum (nihil refert num sint proportionales, an non) hoc est producti ex primo in secundum, & ex tertio in quartum multiplicentur adinuicem (per primum, & tertium intellige numeros per quos potestates numerantur; per secundum, & quartum verò potestates ipsas) is, qui emergit aequalis est illi, qui fit si multiplicetur primus in tertium, & secundus in quartum, & producti multiplicentur inter se.*

Exemplis illustratur superior doctrina.

Hæc autem exemplis, facilè possunt illustrari, & ratiocinio demonstrari. Etenim si sint quatuor numeri 2, 4, 8, 16, &, qui fit ex 2, in 4, scilicet 8, ducatur in 128, factum ex 8, in 16, fiet enim 1024; Idem autem numerus prouenit, si multiplicetur 2 per 8, & numerus productus

3.	7.	4.	9.
36		63	
21		12	
36		126	
72		63	
756		756	

16.

16, ducatur in 64, factum ex 4, in 16, nàm fiet 1024. Idem intellige ſi forent quatuor numeri 3, 7, 4, 9. qui non ſunt proportionales.

Demõſtratio ſupradictorum.

Demonſtratur autem hoc modo. Sint numeri A, B, C, D; & numerus A, multiplicans B, producat E, multiplicans C, producat F; at numerus D, multiplicans C, producat G, multiplicans B, producat H, erit [a], vt C, ad B, ita F, ad E; & quia D, multiplicans C, & B, producit G, & H, erit [b], vt C, ad B, ita G, ad H, ſed vt C, ad B, ita F, ad E, ergo, vt F, ad E, ita erit G, ad H, quamobrem numerus factus ex F, in H, æqualis erit [c], facto ex E, in G, ſed numerus F, producitur ex A, in C, & numerus H, ex B, in D, & numerus E, ex A, in B, & numerus G, ex C, in D, ergo, &c. Quod oportebat oſtendere.

A	B	C	D
3	7	4	9
F	E	G	H
12	21	36	63

a 17. ſeptimi.
b 17. ſeptimi.
c 19. ſeptimi.

S C H O L I O N.

Demõſtratur ſuperius dicta, per reductionẽ numerorũ denominatorũ in numeros abſolutos.

Vpponamus 4&, cudenda eſſe in 3R, ſit 1R, pretium 5, ergo 1Q, valebit 25, Inſtituta multiplicatione fiet productum 12C. Modo primus numerus erit 3, ſecundus 5, tertius 4, & quartus 25, ſi reſoluamus 3R, in numeros abſolutos, vtiq; trium radicum valor erit 15; & reſolutis 4Q, in numeros abſolutos valor eorum erit 100; Itaq; ducere 4Q, in 3R, erit multiplicare 100, per 15, quorum productum eſt 1500, hoc eſt 15, numerus productus ex 3, primo in 5, ſecundum ſi ducatur in 100, numerum productum ex 4, tertio in 25, quartum producit 1500, quantum producit 12, numerus productus ex 3, in 4, primo in tertium, qui ſunt numeri poteſtatum in 125, numerum factum ex 5, ſecundo in 25, quartum, videlicet, in cubum ex 5; cum 5, ſit radix quadrata numeri 25; vnde non mirum, ſi productum ex 4Q, in 3R, ſit 12C; & ita de reliquis poteſtatibus intelligendum eſt.

3, 5, 4, 25.

Demõstratio multiplicationis potestatum. Propositio. Ad 11. propos. lib. 9. Euclidis.

Rectè verò fieri multiplicationem potestatum additione exponentium, &c. deducitur ex Elementis; ostenditur enim ibi *Si numerus in Geometrica progressione incipiente ab vnitate se ipsum multiplicet, numerum producit progressionis eiusdem; qui tantum ab eo exclusiuè distat, quantum is ab vnitate*. Hæc autem distantia cum habeatur additione exponentium, & eadem habebitur potestas quæsita. Quamobrem si 1Q, ducatur in se, fit 1QQ, quæ quidem potestas habebitur additione exponentium; etenim ipsa comparatur quotum locum occupet QQ, ab Q, exclusiuè, exponens enim est 4, qui designat secundum locum exclusiuè à 24, exponente Q, qui item secundum locum occupat ab Vnitate exclusiuè. Cum itaq; res ita se habeat, sequitur additione exponentium, quando potestas in se ducitur, comparari numerum, à quo designatur potestas emergens ex multiplicatione ipsa.

Additione exponentiũ, cõparatur numerus, à quo designatur potestas emergẽs ex multiplicatione, quando potestas in se ducitur, quando etiam in aliam. Propositio. Ad 11. propos. lib. 9. Euclidis.

Pariter eadem de causa, quando multiplicatur potestas aliqua in aliam potestatem; etenim habetur eodem loco Elementornm. *Si minor quispiam numerus Geometricæ progressionis ab vnitate incipientis, multiplicet quempiam maiorem progressionis eiusdem, producitur numerus, qui tantùm à maiori distat exclusiuè, in progressione eadem, quantùm minor exclusiuè distat ab Vnitate*. Vt si multiplicetur C, per R, producetur QQ, siquidem exponens R, est 1, & exponens C, est 3, qui simul additi faciunt 4, exponentem ipsius QQ, tantùm autem distat numerus 4, exclusiuè à 3, exponente characteris C, quantùm 1, exponens ipsius R, exclusiuè ab vnitate, quæ est progressionis Geometricæ initium. Cum itaq; additione exponentium procreatur numerus designans locum distantem, &c. etiam potestas quæsita designabitur.

Tabula cõducens plurimum ad potestatum multiplicationẽ. Eiusdem vsus.

Facilitatis autem gratia hæc tabella constructa est, vt quisq; oculorum ictu possit omnia conspicere, quantum nimirum ad potestatum multiplicationem.

Huius autem Tabellæ vsus hic est. Vel in fronte, vel à latere sinistro, quære exponentem characteris, ducendi

in

in characterem alterum, cuius exponẽtem inſpice in fronte, vel à latere prout priorem exponentem in alterutro loco inſpexeris; tunc quære in angulo communi, vbi offertur character poteſtatis productæ.

Exponentes	1	2	3	4	5	6	7
	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
1 R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC
2 Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC
3 C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC
4 QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
5 QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC
6 CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC
7 QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC	QCCCC

Exponentes

Quando autem numeri fuerint compoſiti, per quos tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & miſtos intelligo; habenda eſt ratio ſignorum ✛, & —, in cuius gratiam eorum multiplicationem addiſce. *Quãdo numeri fuerint compoſiti.*

Signorum +, & − Multiplicatio.

+ in + facit +. Hoc est, Plus ductum in Plus facit Plus.
− in − facit +. Hoc est, Minus ductum in Minus facit Plus.
+ in − facit −. Hoc est, Plus ductum in Minus facit Minus.
− in + facit −. Hoc est, Minus ductum in Plus facit Minus.

Explicatur praecepta.

Itaq; siue numerum compositum ducere debeamus in numerum simplicem absolutum, siue in simplicem denominatum, siue in compositum; institui debet multiplicatio secundum partes, & habenda est ratio potestatum, characterum, & signorum +, & −. Exemplis autem res fiet illustrior. Ducantur 10Q + 6R, in 5, fiet productum 50Q + 30R; Hoc si ducatur in 4R, fiet productum 200C + 120Q. Multiplicemus 8Q + 5R, in 6Q + 4R, fiet productum 48QQ + 62C + 20Q; Vel secundũ alios 48QQ + 20Q + 62C.

Exemplis enucleatur superior doctrina.

10Q +	6R
	5
50Q +	30R
	4R
200C +	120Q

	8Q +	5R
	6Q +	4R
	32C +	20Q
48QQ + 30C		
48QQ +	62C +	20Q

Etenim aliquibus visum est, ea, quae fiunt ex multiplicatione extremorum ex vtraq; parte constitui, scribiq; debere in summa, priusquam ea, quae emergunt ex multiplicatione per crucem: & quidem quando intercedit signum −, melius est ita scribere, sed illo non intercedente, nihil refert.

	8Q +	5R
	8Q +	4R
	32C +	20Q
64QQ + 40C		
64QQ +	72C +	20Q

Itaq;

Itaq; cum multiplicamus 8 Q — 4 R, in 5 Q — 2 R, & fit productum 40 QQ — 36 C ✚ 8 Q; sensus est, quod ab aggregato ex 40 QQ, & 8 Q, subtrahi debent 36 C. Proinde melius fortassis erit scribere 40 QQ ✚ 8 Q — 36 C. Quod enim C, maior Potestas, quam Q postponatur, nihil refert.

12 Q ✚ 5 R	8 Q — 4 R
6 Q — 2 R	5 Q — 2 R
— 24 C — 10 Q	— 16 C ✚ 8 Q
72 QQ ✚ 30 C	40 QQ — 20 C
72 QQ ✚ 6 C — 10 Q	40 QQ — 36 C ✚ 8 Q vel
	40 QQ ✚ 8 Q — 36 C

Hæc autem ita demonstrantur, & primò quidem rectè multiplicationis operationem institui, multiplicando partes singillatim, &c. ex eo patet; quia *Si fuerint duo numeri, & ipsorum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis est numero, qui sub indiuiso numero, & qualibet diuisi numeri parte continetur.* Quod facilè demonstrari poterit ex ijs, quæ in Elementis ostenduntur.

Huius operationis demonstratio. Propositio.

Itaq; idem est multiplicare diuisum in indiuisũ; ac est multiplicare partes ipsius diuisi in indiuisum, productosq; numeros in vnam colligere summam. Sit numerus 40, diuisus in duas partes 30, & 10; Si multiplicemus 10, per 5, producentur 50. Si 30, per 5, fient 150, horum summa est 200. Idem autem numerus 200, producitur ex multiplicatione numeri 40, in 5; Si igitur sint duo numeri, & ipsorum

30 ✚ 10
5
150 ✚ 50
40
5
200
30 ✚ 10 ✚ 6
5
150 ✚ 50 ✚ 30

Exemplis explicatur superior demonstratio.

rum

rum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis est numeris simul collectis, qui sub indiuiso numero, & quanumeris simul collectis, qui sub indiuiso numero, & qualibet diuisi numeri parte continentur. Idem intellige, si numerus diuisus sit in plures partes, quàm in duas.

A30 D10 B

C5 F200

G150 H50 K

A30 D10 E6 B

C5 F230

G150 H50 I30 K

Hoc autem modo demonstrabimus, quæ diximus. *Demonstratio.* Sint duo numeri AB, & C, quorum AB, sit diuisus in duas partes AD, DB; vel in plures quotcunq; exempli gratia tres AD, DE, EB, sit autem F, qui fit ex AB, in C, indiuisus autem C, multiplicans AB, producat F, multiplicans AD, producat GH, multiplicans DB, in prima figura producat HK; in secunda verò multiplicans AD, producat GH, & multiplicans DE, producat HI; Deniq; multiplicans EB, producat IK. Dico F, in prima figura æqualem esse GH, HK, seu GK, toti composito ex GH, HK; In secunda verò æqualem esse GH, HI, IK; seu GK, composito ex GH, HI, IK. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F, metiatur AB, ipsum F, necesse est*, per C; hoc est *a 2. pronũciatum.* AB, erit pars ipsius F, denominata à C. Sic etiam ratione eadem AD, pars erit ipsius GH, & DB, ipsius HK, in prima figura; vt DE, ipsius HI, & EB, ipsius IK, in secunda figura; pars inquam erit à C, denominata; videlicet eadem pars, quæ est AB, ipsius F. Cum autem *Si sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; & omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius*, vt demonstratur ad quintam propositionem lib. 7: ob id totus AB, totius GK, eadem pars erit, quæ AD, ipsius GH. Sed quæ pars est AD, ipsius GH, est AB, ipsius F: erit proinde AB totus, pars totius GK, quæ idem

AB,

AB, ipsius F; proinde GK, & F, erunt b, inter se æquales. Hoc etiam ex suprapoſito diagrammate cognoſcere licet. *b 4 propoſi. ſeptimi.*

At ſi loquamur de multiplicatione compoſiti in compoſitum; certè non minùs patet demonſtratio: quandoquidem *Si duo numeri fuerint vtcunq; diuiſi; numerus planus comprehenſus ſub totalibus numeris, æqualis eſt aggregato illorũ, qui ſub partibus comprehenduntur.* *Propoſitio.*

Vt ſi ſint duo numeri 40, & 26, quorum ille diuiſus ſit in duas partes 30, & 10; hic autem in 20, & 6; Si 40, ducentur in 26, producentur 1040. *Exẽplis declaratur ſuperior doctrina.*

40	600	30 + 10
26	380	20 + 6
—	60	—
240	—	180 + 60
80	1040	600 + 200
—		—
1040		600 + 380 + 60

Idem autem numerus fiet; ſi ducatur 10, in 6; item 30, in 6; mox 20, in 10; itemq; 20, in 30: numeri enim producti 600, 200, 180, & 60, ſimul ſumpti efficiunt 1040, vt patet ex hoc paradigmate.

Quod attinet ad ſigna; nimirum + in + facere +, ex eo conſtat, *Quod ſi duo fuerint vtcunq; numeri diuiſi: numerus emergens ex eorum multiplicatione, æqualis eſt numero plano comprehenſo ſub primis partibus; plus planis numeris, quorum vnus ſub prima vnius, & ſecunda alterius; alter autem ſub prima huius, & ſecunda illius; plus deniq; illo, qui fit ſub ſecundis.* *Demõſtratio quoad ſigna. Propoſitio.*

Si enim fuerint duæ rectæ, ſecenturq; ambæ in quotcunq; ſegmenta; rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis: vt demonſtrauit Commandinius in primam propoſitionem ſecundi Elementorum; quod vtiq; numeris etiam accommodari poteſt. *Propoſitio.*

Sint

Exemplo declaratur superior propositio.

Sint numeri 70 & 30, quorum ille diuisus in 40, & 30, hic in 20, & 10. Ex 70, in 30, fit 2100. Idem autem fit si numerus planus 300, ex primis partibus 30, & 10, factus, addatur planis reliquis, vt patet.

	40 + 30	
	20 + 10	
	400 + 300	
800 + 600		
800 + 600 + 400 + 300		

Demonstratio quoad signa —, & —: nempe — in — efficere +. Propositio.

Itidem perspicua est demonstratio, quoad signa —, & —: nimirum — in — efficere +. Etenim

Si fuerint duo numeri differentes, itemq; & alij duo: numerus planus, qui sub istis differentijs comprehenditur; æqualis est numero plano sub maioribus ex ipsis differentibus, plus plano sub minoribus, qui afficiuntur signo —, minus plano sub minori vnius, & maiori alterius, & ita vicissim. Hoc autem totum facilè deducetur ex Elementis. Quod facilè constare potest exemplo numerorum 60 — 20, & 40 — 10.

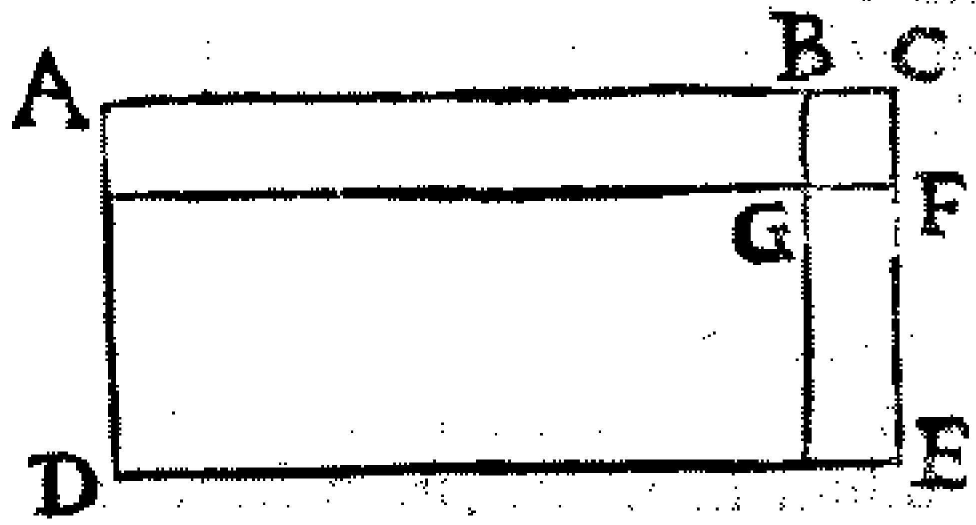
Demõstratio.

Rectangulum autem sit DC, comprehensum sub AC, CE, vna cum rectangulo sub BC, CF, æquale est rectangulo DG, sub AB, FE; plus rectangulo sub AC, CF, vna cum rectangulo sub EC, BC; constat autem AB, differentiam esse inter AC, BC, & FE, differentiam inter EC, & CF; si igitur à rectangulo sub AC, CE, plus rectangulo sub BC, CF, auferatur rectangulum sub AC, CF, plus rectangulo sub EC, CB, remanebit rectangulum DG, sub AB, FE, nempè sub differentijs.

	60 — 20	60
	40 — 10	20
	— 600 + 200	40
2400 — 800		—
200		40
	40	10
2600	30	—
1400		30
	1200	
1200		

Et

Et hinc etiam deducitur demonstratio quoad signa ✣, & —, itaut non sit opus vlteriori declaratione. Quoad numeros verò surdos, nihil occurrit dicendum; ex generali siqvidem doctrina illorum perspicuum remanet, quid agendum in multiplicatione, quando afficiuntur characteribus Potestatum, &c.



Quoad signa ✣, et —, & è contra. Quoad numeros surdos.

Explicatur multiplicatio potestatum numeratarum à numeris irrationalibus.

Multiplicentur itaq; numeri irrationales, & in vnam summam colligantur exponentes potestatum; videatur character, qui huic debetur summæ, tribuaturq; producto ex multiplicatione, &c. Multiplicemus ℞ 5 R in 2, fit productum ℞ 20R. Præterea ex ℞ 6R, in 3R, fit ℞ 54Q. Insuper ex ℞ 7R, in ℞ 3R, fit ℞ 21Q; & sic de reliquis.

Difficultas.

Occurrit autem circa hoc vnum certè notatu dignum. Si sit iniunctum ducere numerum surdum dignitate affectum in numerum absolutum affectum quoq; dignitate; vt ℞ 7R in 2R: verum quadrantes numerum, vt illum nimirum ad alterius naturam reuocemus, nempè irrationalis, debeamus quadrare pariter ipsam dignitatem, itaut non sit instituenda multiplicatio inter ℞ 7 R, & 4 R, sed inter ℞ 7 R, & 4 Q. Rationes non desunt hinc inde.

Quid agendum.

Sed negatiuam sententiam esse probabiliorem opinor, & substineri posse faciliùs; nempè intactam relinquendam esse potestatem. Etenim Radix (vt aduertit Bombellius) nihil est aliud, quàm numerus in potentia: quapropter solùm discrimen est inter numeros; itaut ad dignitatem ipsam hoc non attineat. Id autem ita se habere perspicuum erit ex nostrorum Problematum resolutionibus, in quibus id, cum se obtulerit occasio, demonstrabimus.

Quãdo Radices sunt natura diuersæ.

Quòd si Radices fuerint natura diuersæ, reducantur ad eandem naturam; vt suo loco de multiplicatione irrationalium

nalium numerorum tractauimus. Eodem pacto procedendum erit in multiplicatione numerorum compositorum; vt de ipsis sine potestatum characteribus suo loco dictum est: additis tamen præceptis potestatum multiplicationis.

Quãdo Radices sunt vniuersales.

Quod si fuerint Radices vniuersales, tàm simplices, quàm compositæ, nihil hic dicendum se offert; cum eodem modo fiat horum numerorum multiplicatio, quemadmodum fit numerorum irrationalium, simplicium, & compositorum, cum ipsis potestatibus non ligatorum, de quibus iam egimus; nihil enim aliud in his prætereà requiritur, quàm liberare numeros à clausulis, seu parenthesi, & eodem modo procedere, vt in illis; proindè hic silentio hanc operationem inuoluimus.

Multiplicationis probatio.

Cæterùm multiplicationis probatio rectè instituitur per diuisionem, de qua infra; quemadmodum diuisio per multiplicationem, vt postea constabit.

Primus probationis modus.

Secundus modus probationis:

Deinde institui potest examen, & probatio multiplicationis, per resolutionem numerorum denominatorum, secundum aliquam radicem Geometricæ progressionis: etenim numeri denominati resoluti, si multiplicentur adinuicem, tantum efficere debent, quantum numeri denominati producti, si iuxta radicem eandem resoluantur. Vt ex ductu 4R + 2 in 3R + 3,

Exẽplo declaratur superior doctrina.

fiunt 12Q + 18R + 6. Resoluamus numeros denominatos secũdum radicis extimationem 3: erunt ergo 4R + 2 idẽ quod 14; & 3R + 3 idem quod 12: ex ductu autem 14, in 12, fiunt 168; quantum sanè fit ex resolutione iuxta eandem radicis extimationem ipsius producti 12Q + 18R + 6. Etenim 12Q idem est, quod 108, hoc est, 12Q valet 108;

	4R + 2
	3R + 3
	12R + 6
12Q +	6R
12Q + 18R + 6	

108
54
6
168

si 1R,

si 1R, valor sit 3: & 18R, idem quod 54; nàm si 1R, valor est 3, vtiq; 18R, valebunt 54: modò si ad 108, addantur 54 ✠ 6, fiet summa 168, vt patet.

Hinc manifestum est, quod supra dicebamus; additionem terminorum Arithmeticæ progressionis respondere multiplicationi terminorum Geometricæ progressionis: etenim, vt ex additione 3, ad 5, fiunt 8; ita in via communi ex ductu SS, in C, quorum exponentes sunt 5, & 3, nimirum 32, in 8, producentur 128, seu QQQ, cuius exponens est 8; & in via Diophantæa, ex ductu QC, in C, fiet QCC: quapropter si character in characterem ducatur, producitur character tantùm distans a maiori exclusiuè, quantùm ab vnitate minor.

Additio terminorũ Arithmeticæ progressionis respõdet multiplicationi Geometricæ progressionis.

Numerorum Denominatorum Diuisio.

OPERATIO QVARTA.

In diuisione, vt in cæteris operationibus, occurrit numerorũ varietas, atq; distinctio.

NOn minùs in diuisione, quàm in cæteris operationibus occurrere potest numerorum varietas in superioribus à nobis instituta.

Quãdo numerus denominatus diuidi debet per numerum absolutum.

Si numerus denominatus diuidendus sit per numerum absolutum, & denominatum à potestatis charactere; instituatur diuisio, vt in numeris absolutis, seu vulgaribus: etenim pro quotiente numerus emerget appellationis eiusdem cum numero diuiso. Vt si diuidantur 100R, per 25, fiet quotiens 4R: insuper diuisis 30Q, per 10, fit quotiens 3Q: item si diuidantur 40C, per 2, quotiens emerget 20C; & sic de reliquis.

Exẽplo declarantur præcepta.

Quãdo numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatũ.

At verò si numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatum; instituatur diuisio, vt in numeris vulgaribus, siuè absolutis, & emerget numerus alterius denominationis, quæ hac dignoscetur arte.

Diuisionis supradictæ præcepta.

Exponens denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente denominationis diuisæ, & numerus prosiliens, erit exponens denominationis quotientis.

Exemplis doctrina tradita illustratur.

Vt diuidere debeamus 12R, per 3R: diuidatur 12 per 3, fiet quotiens 4: modo ad indagandam eius denominationem, exponens ipsius R, denominationis diuidentis, ab 1, exponente ipsius R, denominationis diuidendæ; factaq; subtractione, nihil remanebit. Ob id dicemus quotientem ipsius diuisionis, nimirum illorum denominationem esse 0: atq; adeò diuisis 12R, per 3R, fieri quotientem numerum absolutum. Diuidere operæ pretium sit 20C, per 5Q. Diuidantur 20, per 5, fit quotiens 4; deinde subtracto numero 2, exponente quadrati, abs 3, exponente ipsius C, remanebit 1, exponens huius denominationis Radicis: ob id dicemus diuisis 20C, per 5Q, fieri quotientem 4R: item diuisis 15Q, per 3R, fiet quotiens 5R: præterea diuisis 24QC, per 12C, fiet quotiens 2Q, &c.

In huius autem operationis gratiam hæc à nobis subijcitur tabella; in qua totum hoc perspicuè cernere licet: huius autem vsus facilis est, & relinquitur manifestus ex explicatione iam tradita Tabellæ superius positæ in gratiam multiplicationis.

Demõstratio.

Demonstratio hæc est. Cum diuisio numeri per numerum nihil aliud sit, quàm inuentio numeri, ad quem diuisus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem. Hoc certè aliter fieri non potest, quàm applicando diuidendum ad diuidentem: exhibetur enim numerus quotiens; nimirum ostendens, quoties diuidendus diuisorem complectitur, & hic ad diuisum eam rationem habeat, quam vnitas ad diuisorem. Numerus enim numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

Sup.

Exponentes		1	2	3	4	5	6	7
		R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
Exponentes 1	R	N	R	Q	C	QQ	QC	CC
2	Q	R	N	R	Q	C	QQ	QC
3	C	Q	R	N	R	Q	C	QQ
4	QQ	C	Q	R	N	R	Q	C
5	QC	QQ	C	Q	R	N	R	Q
6	CC	QC	QQ	C	Q	R	N	R
7	QQC	CC	QC	QQ	C	Q	R	N

Exēplo illustratur superior doctrina.

Supponamus 100, diuidi per 5; fit quotiens 20, numerus ostendens, quoties 5, continetur in 100: habet autem 20, ad 100, rationem eandem, quam habet 5, ad vnitatem.

$$\frac{100}{5}\ 20$$

1, 5, 20, 100.

Demōstratio quoad potestates.

Quod attinet ad potestates, sic ostenditur rectè operationem institui diuidendo potestates; nam *Si fuerint quatuor*

tuor

Propositio. *tuor numeri (per primum, & tertium intelligo numeros, à quibus potestates numerantur; per secundum, & quartum potestates ipsas) diuidatur autem primus per tertium, & quotiens ducatur in quotientem secundi diuisi per quartum: producto numero æqualis est ille, qui emergit ex diuisione producti ex primo in secundum, per productum ex tertio in quartum, itaut in idem recidat, vtrouis modo procedatur.*

Exẽplo explicatur superior doctrina.

Sint quatuor numeri, vt vides.

140, 20, 10, 5.

Diuisis 140, per 10, fit quotiens 14; hic si ducatur in 4, numerum quotientem in diuisione numeri 20, per 5, producentur 56; modo si ducantur 140, in 20, producentur 2800; his porrò diuisis per 50, numerum productum ex multiplicatione numeri 10, per 5, fit quotiens 56. Hoc idem cernere licet in his alijs numeris 16, 8, 12, 4. Si 16, diuidamus per 12, fit quotiens $1\frac{1}{3}$; si verò 8, diuidamus per 4, fit quotiens 2; si verò $1\frac{1}{3}$, multiplicetur per 2, fiet numerus productus $2\frac{2}{3}$: modo si 16, multiplicemus per 8, producentur 128; his autem diuisis per 48, numerum productum ex 12, in 4, producetur quotiens $2\frac{2}{3}$, vt patet.

A
14

B 140 — C 10

D 20 — E 5

F
4

G 2800 — H 56 — I 50

K
2800

D	H	I	B
10	56	50	140

Sint

Sint numeri B, C, D, E; & quidem D, multiplicans B, producat G; & E, multiplicans C, producat I: diuidatur B, per C; proueniat A: diuidatur D, per E; & proueniat F: multiplicetur A, per F; & producatur H: si ducatur H, in I, producatur K. Dico K, æqualem esse G. Quoniam enim sunt quatuor numeri A, F, C, E; si E, multiplicetur per F, producitur D, toties continebitur E, in D, quoties vnitas continetur in F: & quia F, multiplicans A, producit H; toties continebitur A, in H, quoties vnitas in F. Ergo, vt E, ad D, ita A, ad H; & permutando [a], vt E, ad A, ita D, ad H: & quia C, multiplicans A, producit B; quoties vnitas continetur in C, toties A, continebitur in B; & quia C, multiplicans E, producit I; quoties vnitas continetur in C, toties E, continebitur in I. Vt igitur E, ad I, ita A, ad B; & permutando [b], vt E, ad A, ita I, ad B: sed vt E, ad A, ita est D, ad H: ergo vt D, ad H, ita I, ad B. Sunt igitur proportionales D, H, I, B; proinde, numerus factus ex D, in B, nimirum G, æqualis erit [a], numero K, facto ex H, in I, quod erat ostendendum, &c.

[Demonstratio.] [a 16. quinti.] [b 16. quinti.] [a 19. septimi.]

Sint 6C, diuidendi per 12Q: supponamus 1R, valorem esse 5; si primus 6, diuidatur per tertium 12, prouenit quotiens $\frac{1}{2}$: diuidatur autem secundus 125, per 25, fiet quotiens 5; ducatur in $\frac{1}{2}$, fiet numerus productus $2\frac{1}{2}$; si multiplicemus 125, per 6, producentur 750; si verò 25, per 12, fient 300. At verò diuisis 750, per 300, emerget pro quotiente $2\frac{1}{2}$, nempè dimidium radicis. Rectè igitur dicebamus, &c. si namq; diuidantur 6 C, per 12 Q, prosilit in quotiente $\frac{1}{2}$ R.

[Exẽplo declaratur superior doctrina.]

6	$\frac{1}{2}$	12
125		25
	5	
750	$2\frac{1}{2}$	300

$$\frac{750}{300}\ 2\tfrac{1}{2}$$

Opti-

Additione exponentiū rectè fieri potestatum multiplicatione ostenditur.

Optimè verò fieri diuisionem potestatum subtractione exponentium, patet ex eo quia, vt additione fit multiplicatio, ita subtractione fit diuisio: quapropter vt addendo exponentem 2, ad exponentem 3, fit exponens 5, & censetur produci primus relatus in via communi, & quadrato-cubus iuxta Diophantum; ita etiam in eadem communi via subtrahendo 2, abs 5, remanebit exponens 3, cui respondit cubus in vtraq; via: & sic de reliquis; obseruato discrimine inter Diophantum, & alios.

Cum numerum denominatum, per numerum absolutum, vel per denominatum, tàm simplicem, quàm compositum diuidere debeamus (per compositos intelligo, tàm propriè compositos, quàm diminutos, & mixtos) habenda est ratio signorum +, & —: proinde aduertendum est, quid agendum circa hæc signa.

Diuisio Signorum +, & —.

+ *per* + *emergit* +. *Hoc est, si Plus diuidatur per Plus, emergit Plus.*

— *per* — *emergit* +. *Hoc est, Minus si diuidatur per Minus, emergit Plus.*

+ *per* — *emergit* —. *Hoc est, Plus si diuidatur per Minus, emergit Minus.*

— *per* + *emergit* —. *Hoc est, si Minus diuidatur per Plus, emergit Minus.*

Si † diuidatur per †.

Cæterum potiùs vberioris doctrinæ gratia hæc adiecimus: vt plurimùm enim numerus compositus per compositum diuisionem non patitur; sed pro quotiente prosilit fractio, vt infra dicemus.

Si † diuidatur per †, fieri † ostenditur.

Et quoad signorum, quæ iam recensuimus +, & —, diuisionem attinet; nempe si + diuidatur per + fieri +, ex ijs fit manifestum, quæ superius circa multiplicationem in medium attulimus. Cum enim diceremus + in + efficere +, necesse est ex diuisione + per + fieri +.

Se-

Secundò — per — emergere +, hoc eſt, ſi — per — diuidatur emergere +, patet; ſiquidem ducendo — in +, concluſimus ſupra produci —: ergo diuidendo — per — emerget +. Vt ſi ducantur + 12, in — 3, fiet productum — 36, quibus diuiſis per — 3, emerget pro quotiente + 12. Atverò diuidendo + per —, & è contra, produci —, ex eo conſtat; quod ſi + ducatur in —, producitur —, & è contra: ergo — ſi diuidatur per +, emerget —; ſic etiam è contra, &c.

Si — diuidatur per — fieri + demonſtratur.

Quando + diuidatur per —, vel contra, &c.

Iniunctum ſit diuidere 12 Q + 6 R per 3, fit quotiens 4 Q + 2 R: diuidantur 16 C + 4 Q per 2 Q, fiet quotiens 8 R + 2: inſuper ſi diuidere deberemus 20 C + 12 Q per 4 R, fit quotiens 5 Q + 3 R.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Cum autem diuiſor fuerit numerus compoſitus, vt plurimum non poteſt inſtitui diuiſio, ſed in quotiente proſilit fractio: tunc autem diuiſio poterit inſtitui, quando partes diuidendi, ad partes diuiſoris eandem rationem habent; vt ſi diuidere deberemus 12 Q + 8, per 6 Q + 4. Quæ proportio eſt enim 12 Q, ad 6 Q, ea eſt 8, ad 4; proinde quotiens ex hac diuiſione proſiliens erit 2. Ita ſi 12 Q + 18, diuidere deberemus per 4 Q + 6, fiet quotiens 3.

Quãdo diuiſor fuerit numerus compoſitus.

Quãdo per numerum compoſitum inſtitui poteſt diuiſio.

Præterea diuidere ſit opus 16 Q + 6 R, per 8 R + 3. Fiet quotiens 2 R; eadem enim eſt proportio 16 Q, ad 8 R, quæ eſt 6 R, ad 3: poſſunt etiam alij caſus excogitari, in quibus diuiſio poterit inſtitui, ſed ex his facilè deprehendi poterunt.

Cum autem non poteſt fieri diuiſio, abſoluetur fractione. Vt ſit opus diuidere 7 Q + 15 R + 10, per 2 R + 2, fit quotiens $\frac{7Q + 15R + 10}{2R + 2}$. Inſuper diuidantur 10 C + 7 Q, per 5 R, fit quotiens $\frac{10C + 7Q}{5R}$. Inſuper diuidantur 3 R + 16, per 2, fit quotiens $\frac{3R + 16}{2}$. Item 8 R — 12, per 5, fit quotiens $\frac{8R - 12}{5}$.

Quãdo diuiſio per numerũ compoſitum inſtitui nequit, fit fractio.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Quando diuisor est numerus denominatus maioris appellationis.

Contingit etiam fractio, quando numerus denominatus tàm simplex, quàm compositus per numerum simplicem denominatum appellationis maioris extiterit diuidendus. Vt si diuidere deberemus 10R, per 5 C, fit quotiens $\frac{10R}{5C}$. Item diuisis 12Q, per 6QC, fiet quotiens $\frac{12Q}{6QC}$.

Diuisio per numeros irrationales.

Superest, vt de numeris irrationalibus denominatis verba faciamus, &c. In his possunt varij contingere casus, quemadmodum superiùs dictum est. Diuidatur numerus per numerum, & quotienti præponatur signum radicale illius radicis, quæ diuiditur, &c.

Quando numeri irrationales sunt eiusdē denominationis, & sunt aequales.

Si numerum irrationalem per numerum æqualem, seu per radicem eiusdem numeri, & naturæ diuidi debet. Diuidatur radix per Radicem, nàm quotiens erit Vnitas; vt ex diuisione ℞ 6 Q, per ℞ 6 Q, fit quotiens 1: insuper diuersæ denominationis; vt ℞ 7 Q, per ℞ 7 R, fit quotiens 1 R: & sic de reliquis radicibus naturæ eiusdem, nempè diuidendo Radicem per Radicem, & dignitatem per dignitatem.

Quando numeri sūt eiusdē naturæ at verò fuerint inæquales, quid agendum.

Si fuerint naturæ eiusdem, sed numeri diuersi, vt si diuidere oporteat ℞ 60 Q, per ℞ 5 R, fiet quotiens diuidendo numerum per numerum, & dignitates per dignitates; emerget itaq; pro quotiente ℞ 12 R: item ℞ 48 Q, per ℞ 3 R, fiet quotiens 4 R: ita diuisa ℞ 80 C, per ℞ 5 R, fit quotiens 4 Q.

Num dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus.

Sed hìc occurrit eadem dubitatio superiùs insinuata, vtrum dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus. Existimo dignitatem relinquendam esse intactam; etenim ℞ 9 R, ducenda sit in 2 R, fit productum 6 Q, quod ita declaratur.

Exemplis enucleatur superior doctrina.

Supponamus 1 R, pretium esse 2, erit ergo dicendum ℞ 9 R, esse 6, idem est enim ℞ 9 R, ac est 3 R; insuper 2 R, erunt 4: itaq; ducendo ℞ 9 R, in 2 R, debet fieri numerus denominatus; qui resolutus tantum efficiat, quantum numeri illi denominati resoluti, si inter se ducantur. Constat autem si productum ex ℞ 9 R, in 12 R, dicatur esse 6 Q,

hoc

hoc ſi reſoluatur, ſuppoſito 1 R, pretio 2, erit 24, quantum efficiunt numeri denominati ℞ 9 R, & 2 R, reſolutæ ſi ducantur inter ſe, namq; 6, ſi ducantur in 4, producunt 24: at ſi quadraremus etiam dignitatem, fieret numerus productus 6 C, quod falſum eſt.

Quādo radices ſunt tàm numero, quàm natura diſſimiles.

Si verò radices fuerint, tàm numero, quàm natura diſſimiles, opus eſt illas reducere ad naturam eamdem, vt ſuo loco de irrationalibus numeris agentes verba fecimus.

Quando numerus per radicē, vel è cōtra.

Quod ſi numerum per Radicem, vel è contra, diuidere debeamus, reuocetur numerus ad radicis naturam. Vt diuidere debeamus 10 Q, per ℞ 20 R, fiet quotiens ℞ 5 R. Sic etiam 6 QC, per ℞ 3 Q, fit quotiens ℞ 12 C. Item ſi radicem per numerum partiri, deberemus, vt ℞ 80 Q, per 2 R, fiet quotiens ℞ 20 R, & ſic de reliquis. Hæc autem numeris abſolutis declarare facillimum eſt, vt patet ex hactenus explicatis.

Quando numeri irrationales fuerint cōpoſiti.

Verùm cum numeri irrationales fuerint compoſiti, ea ſunt obſeruanda, quæ de huius generis numeris ſuo loco traduntur; ex ijs enim, & quæ modo diximus, facilè dignoſcetur quid agendum: vt etiam de numeris illis, qui dicuntur radices vniuerſales, tàm ſimplices, quàm compoſitæ. Horum enim numerorum diuiſio, ſe habet inſtar diuiſionis numerorum compoſitorum cum poteſtatibus, de quibus ſupra, qui nimirum ligati non ſunt, obſeruata ligatione tamen cum opus fuerit.

Diuiſionis probatio.

Diuiſionis autem probatio rectè inſtituitur per multiplicationem, quam per diuiſionem comprobari ſuperiùs dicebamus. Comparari etiam poteſt reſolutione numerorum denominatorum in numeros abſolutos. Vt ſi diuidamus 20 Q, per 4 R, fit quotiens 5 R: reſoluamus 20 Q, in numeros abſolutos, ſuppoſito, pretio 2, eſſet 20 Q (facta reſolutione in numeros abſolutos, vt dictum eſt) idem quod 80, & 4 R, idem, quod 8, & 5 R, idem quod 10: diuiſis autem 80, per 8, fit quotiens 10, quantum ſi reſoluatur quotiens 5 R, ſecundum eandem radicem; diuidendus enim numerus denominatus reſolutus, tantum producere debet diuisus per diuisorem resolutum, quantum quotiens secundum eandem radicem pariter resolutus.

Additio numerorum Arithmetica progressionis respondet multiplicationi terminorum progressionis Geometricæ.

Ex hactenus explicatis perspicuum remanet, nedum additionem numerorum Arithmeticæ progressionis respondere multiplicationi terminorum progressionis Geometricæ, vt superiùs innuimus; verùm etiam subtractionem diuisioni. Vt enim subtrahendo 4, ex 7, relinquuntur 3, ita diuiso BSS, per QQ, fit C, in via communi. Ita namq; diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens est 7, per QQ, hoc est per 16, cuius exponens est 4, prosilit numerus 8, nempe C, cuius exponens est 3. Et iuxta Diophantum, sicut subtrahendo 4, ex 7, remanent 3, sic diuiso QQC, per QQ, prosilit C, & ita de reliquis.

SCHOLION.

Quæ paulò obscuriùs tradita sunt hic maximè declarantur, & exēplis præcipuè illustrantur.

Videor nonnulla paulò obscuriùs explicasse: in gratiam Tyronum, libet quædam aduertere. Cum itaq; supra diceremus radices natura, numeroq; similes, duplicandas, triplicandas, &c. seu multiplicandas per 2, per 3, &c. id intelligendum est iuxta Radicum numerum. Si fuerint 2, multiplicentur radices per 2, si tres per 3, & ita deinceps. Hoc autem fieri debet reducto numero in quem ducuntur ad naturam radicis. Si radices fuerint quadratæ debet numerus 2, vel 3, vel 4, &c. quadratè multiplicari. Si radices fuerint cubicæ, debent cubicè multiplicari, &c. prout suo loco de numeris surdis egimus. Insuper cum dicebamus, quando numerus irrationalis addendus est irrationali commensurabili, oportere radicem in radicem ducere, & producti latus duplicare, mox addendum hoc esse ad summam illorum numerorum, & numero emergenti signum radicale præfigendum esse, & characterem opponendum; vt si ad ℞ 20 R, addere sit operæ pretium ℞ 5 R, multiplicentur inter se, & fiet 100, cuius latus quadratum est 10, huius duplum 20, addatur ad 25, summam ex 20, & 5, & fiet summa 45, cui præponatur signum ℞ Q,

Additionis doctrina magis declaratur.

&

& apponatur R, erit summa radicum propositarum ℞45R: hoc intelligendum est de radicibus quadratis. De numeris autem surdis suo loco egimus: de cæteris verò radicum generibus, alia est obseruanda regula, quæ etiam radicibus quadratis inseruit, & generalissima est.

Nempè reperire oportet communē diuisorem, per quem diuisis numeris surdis addendis, à quotientibus extrahantur latera iuxta radicum naturam, & hæc in vnam summam colligantur; mox multiplicetur in se quadratè, vel cubicè, &c. iuxta radicis conditionem, & productum ducatur in communem diuisorem: nam si producto numero signum radicale præponatur, & eidem apponatur character potestatis; habebitur summa quæsita. Vt si proponantur superiores radices ℞20R, & ℞5R; communis diuisor horum numerorum 20, & 5, est 5, hic enim diuidens 20, facit quotientem 4, & 5, diuidens 5, facit quotientem 1, horum latera quadrata 2, & 1, quorum summa 3, si quadratè multiplicetur fiunt 9: modo hic numerus ducatur in 5, communem diuisorem, & fiunt 45; præponatur signum radicale, & apponatur character, fit summa ℞45R, vt priùs. Insuper propositæ sint ℞20R, & ℞45R, communis diuisor est 5, qui diuidens 20, facit quotientem 4, & diuidens 45, facit quotientem 9. Horum latera sunt 2, & 3. quorum summa 5, huius quadratum est 25. quo multiplicato per 5, communem diuisorem, producitur numerus 125, cui præposito signo radicali, & præposito charactere, erit summa quæsita ℞125R, quæ etiam habetur alio modo superiùs explicato.

Methodus generalissima pro omnibus radicibus.

Si proponatur ℞C81R, & ℞C24R, communis reperiatur diuisor, nempè 3, qui diuidens 81, facit quotientem 27, diuidens 24, facit quotientem 8, quorum latera cubica sunt 3, & 2, horum summa 5, huius cubus est 125, hic multiplicetur per 3, communem diuisorem fiunt 375: dicemus itaq; ex ℞C24R, ad ℞C81R, fieri ℞C375R, & ita de cæteris.

Alia exempla ad eandem illustrādā præcepta.

Quod de additione dicimus, de subtractione suo modo intel-

Subtractionis precepta explicatur. intelligendum est. Per primum modum, pro radicibus quadratis, ducantur ad inuicem, & productum latus duplicetur, hoc subtrahatur à summa numerorum surdorum, & residuo præposito signo radicali, & apposito charactere habetur residuum quæsitum. Vt ex ℞ 45 R, subtrahere sit opus ℞ 5, ducantur inter se, fiet numerus 225, cuius latus quadratum est 15; huius duplum 30, subtrahatur ex 50, nimirum à summa ex 45, & 5, & residuo 20, præposito charactere ℞, & postposito R, fiet pro residuo quæsito ℞ 20 R, & ita de reliquis. Si verò Radices fuerint cubicæ, vel aliæ alterius generis, &c. obseruetur secundus modus.

Exemplis explicatur superior doctrina. Quādo radices sunt quadrata.

Quādo radices sunt cubica, vel cuiusq; alterius generis.

Proponatur ℞C135R, & ℞C625R, communis diuisor est 5, qui diuidens 135, facit quotientem 27, & diuidens 625, facit 125, quorum latera cubica sunt 3, & 5; horum interuallum 2, cubicè multiplicetur, & fiet numerus 8, multiplicetur per 5, communem diuisorem, & producetur numerus 40, cui præposito signo radicali, & postposito charactere, fiet residuum quæsitum ℞ C 40 R, & ita de reliquis.

Quando sunt numeri irrationales compositi.

Cum diceremus obseruandam esse legem numerorum surdorum, tractantes de numeris irrationalibus compositis, & de radicibus vniuersalibus, tàm simplicibus, quàm compositis, remisimus Lectorem, ad tractatum nostrum de huiusmodi numeris, adhibitis præceptis signorum ✠, & —. Itaq; si ad ℞24R ✠ ℞20R, addere deberemus ℞ R ✠ ℞5R, fiet summa ℞54R ✠ ℞45R. Item ad ℞40R ✠ ℞20R, addere debeamus ℞10R — ℞5R, fit summa ℞90R ✠ ℞5R: nam ex ℞10R, ad ℞40R, fit summa ℞90R: & ex — ℞5R, ad ✠ ℞20R, fit ✠ ℞5R; etenim — ad ✠ subtrahitur, & notatur maius, &c. ita de reliquis radicum generibus intelligere oportet. Eodem modo sentiendum est suo modo de subtractione. Si sint Radices vniuersales, eæq; simplices, vt ex ℞ (12R) & ℞ (3R) fit summa ℞ (27R): siquidem communis diuisor est 3, qui diuidens 12, facit quotientem 4, & diuidens 3, facit quotientem 1, horum latera quadrata sunt 2, & 1, quorum summa est 3, cuius quadratum est 9,

Subtractionis precepta explicatur.

quod

quod si ducatur in 3, communem diuisorem, producetur 27: itaq; summa quæsita erit ℞ (27R). Insuper eodem pacto ex ℞C(40Q) ad ℞C(135Q) fit summa ℞C(725Q): nam communis diuisor est 5, qui diuidens 40, facit 8, diuidens autem 135, facit 27, horum latera cubica sunt 2, & 3, quorum summæ scilicet 5, cubus est 125, ducatur hic numerus 125 in 5, communem diuisorem, & fit 625; & ita erit quæsita summa ℞C(625Q): eadem arte procedendum est in reliquis.

Exempla, quibus superior doctrina explicatur.

Quod de additione diximus suo modo de subtractione intelligendum est, vt ex ℞ (27R) subtracta ℞ (12R) remanet ℞ (3R): nam communis diuisor est 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 12, facit 4, quorum latera quadrata sunt 3, & 2, horum differentia est 1, cuius quadratum est 1, ducatur in 3, communem diuisorem, fiet numerus 3: itaq; ℞ (3R) erit residuum quæsitum. Et ex ℞C(750Q) subtracta ℞C(48Q) fit residuum ℞C(782Q): communis enim diuisor est 6, qui diuidens 750, facit 125, & diuidens 48, facit 8, quorum latera cubica sunt 2, & 5, horum differentia est 3, cuius cubus est 27, qui si ducatur in 6, communem diuisorem, producuntur 162, &c. & ita de reliquis radicum generibus.

Quæ de additione dicta sunt, etiam de subtractione sunt intelligenda.

Insuper si radices extiterint vniuersales, compositæ, & commensurabiles, vt ex ℞ (27C + 45R) ad ℞ (48C + 20R) fit summa ℞ (147C + 125R): etenim communis diuisor numerorum, qui afficiuntur C, est 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 48, facit 16, quorum radices sunt 3, & 4, horum summa est 7, cuius quadratum 49, si ducatur in 3, communem diuisorem fiet numerus 147, & erit numerus cuborum: deinde quoad numeros radicum, communis diuisor est 5, qui diuidens 45, facit 9, & diuidens 20, facit 4, quorum radices sunt 3, & 2, summa horum numerorum est 5, cuius quadratum 25, si ducatur in 5, communem diuisorem, fit numerus radicum 125, & + ad + facit +: ob id erit summa quæsita ℞(147C + 125R): eodem pacto in reliquis radicū generibus, habita semper animaduersione signorum +, & —.

Quādo radices sunt vniuersales compositæ, & cōmensurabiles, earum additio explicatur.

Quod

Quod autem de additione diximus, facilè potest etiam applicari subtractioni, adeo vt non sit opus vlteriori declaratione.

Explicatur subtractio radicũ vniuersalium. Itaq; si ℞(175C ✠ 20R) subtrahatur ex ℞(252C ✠ 80Q), fiet residuum ℞(7C ✠ 20R): & ex ℞C(1512Q — 320R) subtracta ℞C(875Q — 40R), fit residuum ℞C(7Q — 40R): etenim numerorum, qui Q, afficiuntur communis diuisor est 7, qui numerum 1512, metitur per 216, & numerum 875, metitur per 125; at verò ℞C, numeri 216, est 6, vt numeri 125, est 5, hoc ex illo subtracto, remanet 1, cuius cubus est 1, ducatur hic in 7, communem diuisorem, & producentur 7Q: communis diuisor numerorum, qui afficiuntur R, est 5, qui numerum 320, metitur per 64, & numerum 40, metitur per 8; at verò ℞C, numeri 64, est 4, vt numeri 8, est 2, hic si subtrahatur ex 4, remanet numerus 2, cuius cubus est 8; qui ductus in 5, communem diuisorem facit 40R; & fit —, cum ex — subtrahatur —: ob id residuum erit ℞C(7Q — 40R). Item ex ℞(75C ✠ 18R) subtracta ℞(48C ✠ 12R) remanet ℞(3C — 2R), obseruatis præceptis signorum ✠, & —. Cæterum vnusquisq; poterit præceptorum veritatem intueri, reducendo exempla numerorum denominatorum ad numeros absolutos.

Adnotatio circa ea, quæ habitnus dicta sunt de radicibus vniuersalibus simplicibus. Aduertendum autem, quando loquentes de radicibus vniuersalibus simplicibus dicebamus numeros claudendos intra parenthesim, non reddi sensum per huiusmodi inclusionem, vt radix sit extrahenda coniunctè: sed quòd latus, seu radix vnius, tàm scilicet numeri, quàm dignitatis, loquendo de additione, intelligatur addita lateri alterius, scilicet tàm numeri, quàm dignitatis; si nimirum radix vniuersalis simplex, radici quoq; vniuersali simplici addi debet. Quamobrem si ad ℞(18C) addere deberemus ℞(9C) fit ℞(18C ✠ 9C) cuius sensus est, vt radix tàm numeri, quàm dignitatis ipsius 9C, addita sit ipsius 18C, radici, tàm numeri, quàm dignitatis ad 18C; siquidem non addimus 9C, nàm fieret summa 27C; neq; ad ℞18C, addi-

addimus ℞ 9C, sed ad ℞ (18C) addimus ℞ (9C) hoc est enim addere radicem vniuersalem, siuè ligatam ad ligatam; neq; est sensus, vt summa sit latus illius compositi. Quod per analysin in numeros absolutos perspicuum fiet. Sit opus ad ℞ (18C) addere ℞ (8R): sit 1R, pretium 2, ergo C, erit 8, quamobrem 18C, valebunt 144, huius autem ℞ est 12; insuper 8 R, valebunt 16, cuius ℞ est 4: at verò ex 12, & 4, fit 16. Itaq; si ex ℞ (18C), & ℞ (8R) dicamus fieri ℞ (18C ✠ 8R), sensus erit vt latera illarum radicum vniuersalium intelligantur in vnam summam collecta; non quòd summa illarum radicum sit radix illius compositi ex 18C, & 8 R, si quidem radix hæc esset R 160: constat autem ex additione illarum radicum vniuersalium simplicium nempè 12, & 4, non fieri ℞ 160, sed 16. Si quis autem ad euitandam æquiuocationem, vti vellet commatibus suis debitis locis, opportunè ageret: itaut hoc modo scribatur superius exemplum ℞ (18C, ✠, 8R): & ita de reliquis exemplis intelligendum est.

Exemplis enucleatur superior doctrina.

Si verò ℞ (12Q ✠ 8R) addere deberemus ad ℞ (3Q ✠ 2R): certè sumptis radicibus istis, tanquam vniuersalibus, siuè ligatis compositis, fiet summa ℞ (27Q ✠ 18R). Hoc autem innotescet resolutione horum numerorum in numeros absolutos: nam si supponamus 1 R, pretium esse 2; ergo trium quadratorum pretium erit 12, & duarum radicum pretium erit 4, ob id 3Q ✠ 2R, valebunt 16, quamobrem ℞ (3Q ✠ 2R) valebit 4. At verò eodem radicis pretio existente 2, certè 12Q, valebunt 48, & 8R, valebunt 16, horum summa est 64, proinde 12Q ✠ 8R, valebunt 64, huius radix quadrata est 8. Itaq; ℞ (12Q ✠ 8R) valebit 8. At si 4, valor ipsius ℞ (3Q ✠ 2R) addatur ad 8, valorem ipsius ℞ (12Q ✠ 8R); fit 12, quantum sanè est pretium ipsius ℞ (27 Q ✠ 18R): nam 27 Q, valebunt 108, & 18R, valebunt 36; at verò ex 108, & 36, fit numerus 144, cuius radix quadrata est 12: itaq; pretium ipsius ℞ (27Q ✠ 18R) erit 12.

De fractionibus, siuè minutijs numerorum denominatorum, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT IV.

Operationes occurrentes in fractionibus numerorum denominatorum.

NVmeri quoq; denominati suas habent fractiones, siuè minutias, quemadmodum & vulgares; de his hic agendum superest: circa quas ferè eædem operationes occurrunt, quæ circa fractiones numerorum vulgarium; additis præceptis numerorum integrorum denominatorum, de quibus iam superiùs egimus, quantum nimirum ad characteres ipsos, & quoad signa ✠, & —.

Quo pacto numerentur fractiones numerorũ denominatorum.

Numerantur autem hoc modo, exempli gratia $\frac{12}{15R}$, significat duodecim vnitates diuisas esse per quindecim radices; & $\frac{18R}{50}$, denotat decem, & octo radices diuisas esse, per quinquaginta; $\frac{12QC ✠ 10QQ}{7Q}$, significat numerum 12QC ✠ 10QQ, diuisum esse per 7Q; præterea $\frac{20C ✠ 16R}{5Q ✠ 3R}$, significat hunc numerum 20C ✠ 16R, diuisum esse per 5Q ✠ 3R, & ita de reliquis, & pronunciantur suo modo.

Operationes fractionum, quæ & quot.

Harum autem fractionum operationes hæ sunt, Abbreuiatio, tàm numerorum, quàm characterum, Reductio ad eundem denominatorem, & præterea Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio.

Fractionũ abbreuiatio quoad numeros.

Abbreuiatio fractionum, quoad numeros fit non dissimili modo, ac fit in minutijs vulgaribus, vt fractio ista $\frac{10Q}{5C}$, quoad numeros ad hanc reuocatur $\frac{2Q}{1C}$; & hęc $\frac{16Q}{4QC}$ ad hanc $\frac{4Q}{1QC}$, & ita de reliquis. Ita quoq; $\frac{24QC ✠ 16Q}{64}$ ad hanc

hanc $\frac{3QC+2Q}{8}$; vel $\frac{24QC-16Q}{64}$, ad hanc reuocabitur $\frac{3QC-2Q}{8}$.

Huius autem abbreuiationis ars, quoad numeros in hoc consistit; nempè in inuentione maximæ communis mensuræ: idq; fit eo modo, quo fieri demonstratur in Elementis.

Abbreuiationis ars, quoad numeros, in quo consistat.

Datis enim duobus numeris non primis inter se, ipsorum oportet maximam exhibere mensuram. Subtrahatur minor ex maiori, quoties fieri potest, & numerus reliquus subtrahatur ex minori, & ita deinceps, minor semper ex maiori subtrahatur alterna detractione, quoad in numerum perueniretur, qui præcedentem metiatur: etenim si ad vnitatem perueniretur, numeri propositi essent inter se primi contra hypothesim. Modo reperiatur maxima communis mensura Numeratoris, & Denominatoris arte iam dicta, & factum erit, quod oportet. Subtrahatur à Denominatore Numerator, quoties fieri potest, & si quispiam relinquitur numerus, hic subtrahatur à numeratore, & si rursus quispiam relinquitur, hic subtrahatur ab ipso residuo, & ita deinceps donec perueniatur ad numerum, qui nihil in subtractione ipsa relinquat, sed residuum numerum metiatur: hic erit maxima communis mensura.

Datis duobus numeris non primis inter se maximam eorum exhibere mensuram.

Sint numeri AB CD, subtrahatur CD, ex AB; relinquat EB; hic subtrahatur ex CD, & remaneat FD, communis maxima mensura duorum AB, CD.

A . . . . E . . . . . B

C . . . . . . F . . . D

Sit fractio $\frac{8}{22}$; subtrahatur 8, quoties fieri potest, nempè bis ex 22, remanebunt 6, quibus subtractis ab 8, remanent 2: itaq; dicemus 2, esse maximam communem mensuram; ac proinde diuisis 8, & 22, per 2, fient quotientes 4, & 11. Quotiens autem numeratoris fit numerator, & denominatoris, denominator: hæc emerget fractio illi æqualis $\frac{4}{11}$. Modus hic habetur apud Euclidem lib. 7. prop. 2.

Superior doctrina declaratur exemplo.

& modus, quo inueniri possit maxima mensura trium, aut plurium numerorum, colligitur ex propos. 3. eiusdem libri: quod autem ope subtractionis facimus, idem diuisionis beneficio consequimur.

Operatio abbreuiationis fractionũ cossicarũ ostenditur.

Demonstratio facilis est, ad numeros enim quod attinet cum minutiæ propositæ numeri per eundem numerum diuidantur, nimirum per maximam eorum communem mensuram, eadem erit proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuisos.

Cum ergo per eundem numerum instituatur diuisio dum fit abbreuiatio, ob id erit eadem proportio: quamobrem illæ fractiones erunt æquales; quandoquidem si sint duæ minutiæ quarum denominatores, eandem habeant rationem ad numeratores sunt inter se æquales, cum eandem habeant proportionem ad vnitatem.

Demõstratio.

Hæc autem abbreuiatio sic ostenditur. Sint numeri A, B, non primi inter se (si namq; primi essent, vtiq; minutia AB, esset in minimis terminis constituta, neq; ad minores posset reuocari) sitq; eorum maxima communis mensura C, quæ quidem metiatur A, per D, & B, per E. Dico iam minutiam DE, cuius est numerator D, & denominator E, esse æqualem datæ minutiæ AB; atq; in minimis terminis esse constitutam. Cum enim C, metiatur A, per D, & B, per E, producentur[a] quidem A, B, ex C in D, & E. quamobrem, vt A, ad B, ita erit[b] D ad E. atq; adeo minutiæ AB, DE, erunt inter se æquales; cum illæ minutiæ, quarum numeratores, ad denominatores eandem habent proportionem, sint inter se æquales, vt alibi ostendimus. Quia autem C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos D, E; erunt proinde ex corollario propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B, quod propositum erat.

$$\frac{A\ 18}{B\ 24} \qquad \frac{D\ 3}{E\ 4}$$

$$C\ 6$$

a 9. pronũciat septimi.
b 17. septimi.

Abbreuiatio characterum fit per detractionem exponentis

nentis minoris characteris, ab aliorum characterum exponentibus; & reliquis numeris tribuendo proprios characteres. Exempli gratia, hæc fractio $\frac{12Q}{18QQ}$, hoc modo abbreuiabitur. Primò quoad numeros, reuocabitur ad hanc $\frac{2}{3}$, vt patet ex præceptis traditis. Quoad characteres subtrahatur 2, exponens characteris Q, numeratoris à 4, exponente characteris QQ, denominatoris, & residuo 2, tribuatur character Q, tanquam proprio exponenti, quo affici denominatorem pronunciabimus: itaut fractio fit $\frac{2}{3Q}$. Ita $\frac{15C}{25QC}$ ad hanc reuocabitur $\frac{3}{5Q}$; & hęc $\frac{12Q + 8R}{4R + 4Q}$ reuocabitur ad hanc $\frac{3R + 2}{1 + 1R}$; & ita de singulis; quo fit, vt numerus minoris characteris fiat in hac abbreuiatione absolutus. Insuper fractionem, in qua extat numerus absolutus non posse abbreuiari, quoad characteres, ex hactenus explicatis perspicuum est. Vt hæc fractio $\frac{6}{24QC}$ non potest abbreuiari, quoad characteres; licet quoad numeros nihil prohibeat: ob id ipsa ad hanc reuocabitur $\frac{1}{4QC}$. At verò fractio ista $\frac{6Q}{5QC}$, quoad characteres reducetur ad hanc $\frac{6}{5QQ}$ in via communi, & iuxta Diophantum ad $\frac{6}{5C}$.

Abbreuiatio characterũ, qua arte fiat.

Supponamus 1R pretium esse 2: ob id fractio illa $\frac{6Q}{5QC}$ valebit $\frac{24}{320}$; atq; adeo si reducatur ad $\frac{6}{5QQ}$, cum hęc valeat $\frac{6}{80}$, seu $\frac{3}{40}$, quę ęqualis est priori fractioni $\frac{24}{320}$, benè se habebit reductio supposito quod characteris QC, exponens sit 6, vt in via communi. Si verò iuxta Diophantum supponamus illius characteris QC, exponentem esse 5: dum radix est 2, quadrato-cubus erit 32; atq; adeo illa fra-

Quæ hactenus dicta sũt, explicantur.

fractio $\frac{6Q}{5QC}$ valebit $\frac{24}{160}$: dumq; reducitur ad $\frac{6}{5C}$, hęc cum valeat $\frac{6}{40}$, & hæc fractio sit æqualis illi $\frac{24}{160}$; benè etiam se habebit operatio reductionis. Quod si per QC, intelligamus CC, iuxta Diophantum, eadem reductio continget, ac supra iuxta communem viam. Cęterum quoad numeros nequit fieri reductio.

Explicātur magis, quæ hactenus allata sūt.

Hæc autem $\frac{12Q}{4QC}$ reducetur ad hanc $\frac{12}{4QQ}$, si exponens QC, sit 6, seu sextum sortiatur locum inter dignitates, &c. & hoc quoad reductionem characterum: quoad numeros reducetur ad hanc $\frac{3}{1QQ}$. Vel ad hanc eandem, si cum Diophanto per QC, intelligamus CC; vel si intelligatur QC, iuxta Diophantum quintum habere locum: reducetur ad hanc $\frac{3}{1C}$. Hæc autem $\frac{18Q - 9R}{6R + 3Q}$ reducetur ad hanc $\frac{6R - 3}{2 + 1R}$, vel suo modo iuxta Diophantum.

Demōstratio abbreuiationis characterum.

Abbreuiationis characterum demonstratio, ita se habet. Cum ista depressio fiat per eundem exponentem ita nimirum vt eadem distantia sit inter characteres ad quos facta est reductio, quæ inter characteres initio propositos: eadem erit proportio inter reductos, quæ inter propositos. Itaq; si hæc proponatur fractio $\frac{6C}{12QC}$, ad hanc reuocabitur $\frac{1}{2Q}$ iuxta Diophantum; & erunt inter se æquales: quæ ratio est enim 6C, ad 12QC, eadem est 1, ad 2Q; factum enim sub 6C, & 2Q, æquale est facto sub 12QC, & 1.

Exēplo illustratur superior doctrina.

Rursum ad magis declarandam, & clariùs illustrandam superiorem doctrinam, supponamus 1R, pretium esse 2; ergo $\frac{6C}{12QC}$, erit idem quod $\frac{48}{384}$; insuper $\frac{1}{2Q}$ idem erit,

quod

quod $\frac{1}{8}$: constat autem hanc fractionem fieri, si illa $\frac{48}{384}$ ad minimos terminos reuocetur.

Quo verò pacto reductio istarum fractionum ad eundem denominatorem fiat, aperiamus. Multiplicentur numeratores, in denominatores per crucem, denominatores autem inter se, quemadmodum fit in minutijs vulgaribus. Exempli gratia $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{6C}{7QC}$, si ad eundem denominatorem sit opus reducere; fiat multiplicatio, vt hic apparet: & secundum communem viam reducetur ad istas $\frac{28BSS}{35QQQ}$, & $\frac{30SS}{35QQQ}$; at iuxta Diophantum ad has $\frac{28CC}{35QQC}$, & $\frac{30QC}{35QQC}$.

Demonstratio ita se habet: quoniam idem numerus $7QC$, multiplicans duos $4R$, & $5Q$, producit numeros $28CC$, & $35QQC$; eadem erit proportio $28CC$, ad $35QQC$, quæ $4R$, ad $5Q$; & ideo æquales erunt fractiones $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{28CC}{35QQC}$, & ita de alijs fractionibus intelligendum est.

Huius operationis demonstratio.

$$\frac{4\,R}{5\,Q} \qquad \frac{6\,C}{7\,QC}$$

$$\frac{28\,CC}{35\,QQC} \qquad \frac{30\,QC}{35\,QQC}$$

$$\frac{28\,BSS}{35\,QQQ} \qquad \frac{30\,SS}{35\,QQQ}$$

a 17. septimi.

Demonstratur enim in Elementis. *Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, geniti ex ipsis eandem habebunt rationem, quam multiplicati.* *Propositio.*

Si numerus integer, & fractio reduci debent ad eandem denominationem: numero integro, tanquam numeratori supponatur vnitas, tanquam denominator; & procedatur vt priùs. Exempli gratia 10, & $\frac{3R}{12Q}$ reducere

de-

debeamus ad eundem denominatorem: ſtabit hoc modo $\frac{10}{1} \times \frac{5R}{12Q}$; & reducentur ad has $\frac{120Q}{12Q}$, & $\frac{5R}{12Q}$, hoc eſt 10, & $\frac{5R}{12Q}$.

Quando fractio adhæret integris.

At ſi fractio adhereat integris, priùs reducendi ſunt integri ad fractionem ipſam; deinde procedendum, vt priùs. Reductio ad fractionem fiet, ſi multiplicentur integri per denominatorem fractionis, atq; productus numerus addatur numeratori. Exempli gratia $6C + \frac{4R}{1QC}$, & $\frac{5C}{2QQ}$ reducere debeamus, ita vt fiat idẽ denominator vtriuſq; ipſorũ: ducatur 1QC, in 6C, vt fiat productum 6QCC; & erunt fractiones $\frac{6QCC + 4R}{1Q}$, & $\frac{5C}{2QQ}$ reducendæ ad eandem denominationem, vt priùs.

Quatuor operationes circa fractiones.

Quatuor autem extant, circa fractiones iſtas, operationes; quemadmodum circa numeros fractos vulgares contingunt.

S C H O L I O N.

Notãdum.

AGentes de numeratione fractionum denominatarum, ſuperiùs dicebamus $\frac{12}{15R}$ ſignificare, duodecim vnitates diuiſas eſſe per quindecim Radices; & $\frac{18R}{50}$ ſignificare, decem, & octo Radices diuiſas eſſe per 50: hæ porro ſignificationes meliùs percipientur, ſi in numeros abſolutos aliquas fractiones reſoluamus. Sit fractio $\frac{270}{15R}$: per hanc fractionem ſignificamus 270, vnitates diuiſas eſſe per quindecim Radices. Si 1 R pretium ſit 3, ergo 15 R, valebunt 45, & 270, ſi diuidatur per 45, fit quotiens 6; quamobrem illius fractionis $\frac{270}{15R}$ valor erit 6: ita quoq; ſi ſit fractio $\frac{20R}{5Q}$, ſignificat viginti Radices diuiſas

Explicatur ſuperior fractionũ doctrina.

eſſe

esse per 10; si igitur 1R, pretium sit 3, proinde 20R, valebunt 60, quamobrem si 60, diuidantur per 10, fit quotiens 6, ob id istius fractionis valor erit 6.

Additio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO PRIMA.

Minutiæ addendæ, vel sunt eiusdem denominationis, vel diuersæ. Si eiusdem, colligantur numeratores in eandem summam, & interiecta linea scribatur denominator, quem cõmunem habent collecti numeratores; si sint fractiones istæ $\frac{3R}{8Q}$, & $\frac{5R}{8Q}$ fiet summa $\frac{8R}{8Q}$. Item $\frac{3R}{8C}$, & $\frac{5Q}{8C}$ fiet summa $\frac{3R + 5Q}{8C}$; & insuper $\frac{5R + 3Q}{15C}$, & $\frac{12QQ - 6Q}{15C}$ fiet summa $\frac{12QQ - 3Q + 5R}{15C}$.

Minutiæ addẽdæ, vel sunt eiusdẽ, vel diuersæ denominationis.

Quando habẽt similem denominationẽ.

At verò si denominatores non fuerint omnino similes, minutiæ multiplicentur per crucem, productiq; numeri colligantur, vt fiat numerator fractionis quęsitę. Deinde denominatores ducantur inter se, vt producatur denominator eiusdem quæsitæ fractionis. Vt sint fractiones addendæ $\frac{5R}{4C} \times \frac{4R}{6Q}$ fiet summa $\frac{30C + 16QQ}{24QC}$. Item $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3CQ}$ fiet summa $\frac{6QC + 6Q}{9CC}$ hoc est $\frac{2C + 2}{3QQ}$, & ita de reliquis. Itaq; harum minutiarum additio, non differt ab additione vulgarium minutiarum, habita semper ratione signorum $+$, & $-$, & characterum potestatum.

Quando sunt denominatores diuersi.

Exemplis illustratur superior doctrina.

Lubet exemplum aliquod in numeros absolutos resoluere ad hanc operationem magis illustrandam. Sint fractiones $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3QQ}$: dicebamus summam earum

Exemplum per numeros absolutos.

N esse

esse $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, hoc est $\frac{2C+2}{3QQ}$. Supponamus 1 R, pretium esse 5: fractio igitur illa $\frac{2R}{3Q}$, valebit $\frac{10}{75}$, altera autem $\frac{2}{3QQ}$ valebit $\frac{2}{1875}$. Si 1875, ducamus in 10, producetur numerus 18750: si verò 75, ducamus in 2, producentur 150; quibus additis ad 18750, fiet numerus 18900. Modo si ducamus 1875, in 75, fiet numerus 140625. Itaq; fractio erit $\frac{18900}{140625}$, quæ respondet fractioni $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, etenim 6QC, valent 18750; & 6Q, valeant 150: adeo vt 6QC+6Q, valeant 18900. Insuper 9CC, valent 140625. Reducitur autem illa fractio $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, ad hanc $\frac{2C+2}{3QQ}$, vt dictum est; nempè $\frac{18900}{140625}$, ad hanc $\frac{252}{1875}$: hæc autem æqualis erit illi $\frac{18900}{140625}$; eadem enim est proportio 18900, ad 140625, quæ 252, ad 1875.

Supradictæ operationis demonstratio.

Demonstratio quantum ad characteres, patet ex dictis, quantum ad numeros. Vna ex minutijs sit AB, altera verò CD: ducatur B, denominator in C, numeratorem; fiet E: deinde multiplicetur D in A, & fiat F; postea in vnam summam G, colligantur: multiplicetur B in D, & fiat H; itaut G, sit numerator, & H, denominator. Quoniam B, multiplicans C, D, produxit singulos E, H: erit [a], vt C, ad D, ita E, ad H: insuper quia D, multipli-

$$\frac{A\ 3}{B\ 5} \qquad \frac{C\ 5}{D\ 6}$$

$$\frac{E\ 25}{H\ 30} \qquad \frac{F\ 18}{H\ 30}$$

$$\frac{G\ 43}{H\ 30}$$

[a] 17. septimi.

pli-

plicans A, B, produxit F, H; erit [b], vt A, ad B, ita F, ad H. Quapropter fractio cuius numerator est E, & denominator H, erit æqualis ipsi fractioni, CD; vt patet ex ijs, quæ demonstrantur ad lib. nonum Elementorum: vt & fractio, cuius numerator est F, denominator H, erit æqualis fractioni AB: vt autem est E, ad H, ita EH, ad vnitatem, seu ad integrum, cuius est fractio; & vt F, ad H, ita FH, ad vnitatem, seu ad integrum cuius est fractio; habet enim fractio ad integrum, cuius est fractio, proportionem, quam habet numerator ad denominatorem, vt patet ex ijs, quæ demonstrantur loco citato: ergo vt G, ad H, nempe aggregatum ex E, & F, ad H, ita aggregatum ex EH, FH, hoc est AB, CD, ad vnitatem, seu ad integrum: sed vt G, ad H, ita est [c], quoq; GH, ad vnitatem, seu ad integrum; & vt G, ad H, ita (vt dicebamus) aggregatum ex GH, & FH, seu aggregatum ex AB, CD, ad vnitatem, seu ad integrum: ergo GH, fractio æqualis est fractionum AB, CD, aggregato; quod oportebat ostendere.

b 17. septimi.

c Per ea quæ demonstrãtur ad 9. lib. Elementorum.

SCHOLION.

Non desunt aliæ demonstrationes, quibus hæc operatio fractionum, tum quando minutiæ habent eundem denominatorem, tum quando diuersos denominatores habent: sufficiat autem hoc loco præsentem attulisse.

Subtractio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO SECVNDA.

Fractiones subtrahendæ, vel eundem habent denominatorem, vel diuersum; si eundem denominatorem habent; subtrahatur numerator vnius, à numeratore alterius, & sub residuo idem scribatur denominator.

Subtractionis præcepta.

Subtractionis exempla. Vt sint fractiones subtrahendæ $\frac{6R}{5C}$, & $\frac{15R}{5C}$, adeo vt $\frac{6R}{5C}$ subtrahere debeamus de $\frac{15R}{5C}$: subductis 6R, de 15R, remanent 9R, & erit residuum quæsitum $\frac{9R}{5C}$. Item subtracta fractione hac $\frac{8R}{7QC}$ de $\frac{15Q}{7QC}$, residuum fit $\frac{15Q-8R}{7QC}$. Insuper $\frac{13Q+2R}{5QC-7}$ de $\frac{18C+17Q-5R}{5QC-7}$, residuum erit $\frac{18C+4Q-7R}{5QC-7}$.

Quando denominatores non fuerint omnino similes. Si denominatores non fuerint omnino similes; reducendæ sunt fractiones ad eundem denominatorem, & eodem pacto facienda subtractio. Vt $\frac{4R}{5Q}$ de $\frac{8Q+6R}{5C}$, residuum erit $\frac{20QQ+30C}{25QC}$, hoc est $\frac{4R+6}{5Q}$. Pręterea $\frac{3R}{2Q}$ de $\frac{13Q+3}{4C}$, residuum erit $\frac{14QQ+6Q}{8QC}$, seu $\frac{14Q+6}{8C}$.

Explicatur superior doctrina, resolutis exemplis in numeros absolutos. Hæc autem exempla, si in numeros absolutos resoluantur, multam afferent huic doctrinæ claritatem. Supponamus igitur 1R, pretium esse 2, ergo fractio illa $\frac{4R}{5Q}$ valebit $\frac{8}{20}$, illa verò $\frac{8Q+6R}{5C}$ valebit $\frac{32+12}{40}$, seu $\frac{44}{40}$: & ita reliqua exempla resolui possunt. Itaq; persimilis est hæc subtractio illi, quæ fit in minutijs vulgaribus adhibitis tamen præceptis signorum +, & −, & characterum potestatum, de quibus iam superiùs egimus.

Demonstratio quoad characteres. Demõstratio quoad characteres facilè deducitur ex dictis.

Demonstratio quoad numeros. Quantum ad numeros ita se habet; siuè numeri eundem, siuè diuersos denominatores habeant;

$\frac{8}{20}$	$\times$	$\frac{32+12}{40}$
$\frac{320}{800}$		$\frac{640+240}{800}$

nam

nam si diuersi fuerint ad eundem denominatorem reuocentur, & procedit eadem demõstratio.

$$\frac{20QQ}{25QC} \quad \frac{640}{320} \quad \frac{320}{240} \quad \frac{40QQ + 30C}{25QC}$$

$$\frac{320 + 240, \text{ seu } 560.}{800}$$

$$\frac{20QQ + 30C}{25QC}$$

$$\frac{4QQ + 6C}{5QC} \qquad \frac{112}{160}$$

$$\frac{4R + 6}{5Q} \qquad \frac{14}{20}$$

Sint duæ minutię; AB, quidem subtrahenda, & CD, illa à qua fieri debet subtractio. Ducatur B, in C, vt fiat E; deinde A, in D, vt fiat F: subtrahatur F, ex E; remaneat G, cui subscribatur numerus H, productus ex ductu B, in D. Dico GH, esse fractionem relictam ex subtractione AB, abs CD. Quoniam enim B, multiplicans singulos CD, facit singulos EH; erit [a], vt C, ad D, ita E, ad H: & insuper quoniam D, multiplicans singulos A B, facit singulos F, H; erit [b], vt A, ad B, ita F, ad H: quamobrem E H, ęqualis erit ipsi CD; & FH, ipsi A B: & quia fractiones E H, FH, eundem habent denominatorem H;

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \times \frac{C\ 3}{D\ 5}$$

$$\frac{E\ 21}{H\ 35} \qquad \frac{F\ 15}{H\ 35}$$

$$\frac{G\ 6}{H\ 35}$$

a 17. septimi.

b 17. septimi.

pro-

proinde erunt inter se, vt numeratores E, F, quemadmodum suo loco ostẽdimus. Vt igitur E, ad F, ita minutia EH, ad minutiam FH: & quia minutiæ GH, FH, eundem habent denominatorem; erit vt G, ad F, ita minutia GH, ad minutiam FH; & componendo c, vt GF, simul ad F, ita minutiæ GH, FH, simul ad F, minutiam FH: erat autem, vt E, ad F, ita EH, ad FH; atq; adeo d conuertendo, vt F, ad E, ita FH, ad EH: ergo ex æquo e, erit, vt G, F, simul ad E, ita minutiæ GH, FH, simul ad minutiam EH: at qui G, F, simul sunt æquales ipsi E (subduximus enim F, ex E, & remansit G) erunt ob id minutiæ GH, FH, simul æquales minutiæ EH: cum itaq; minutia EH, componatur ex duabus minutijs FH, GH; si subtrahatur FH, minutia remanens erit GH: at verò minutia EH, est æqualis minutiæ CD; & FH, minutiæ AB: subtracta igitur AB, ex CD, remanebit GH, quod est propositum.

$$\frac{A\,3}{B\,7} \times \frac{C\,3}{D\,5}$$

$$\frac{E\,21}{H\,35} \qquad \frac{F\,15}{H\,35}$$

$$\frac{G\,6}{H\,35}$$

c 18. quinti.
d corol. 4. quinti.
e 22. quinti.

Multiplicatio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO TERTIA.

Multiplicationis præcepta.

MVltiplicentur numeratores inter se, vt fiat numerator productæ fractionis: multiplicentur denominatores, vt emergat denominator. Vt si deberemus multiplicare $\frac{5R}{4Q}$ in $\frac{3R}{5Q}$, fiet productum $\frac{15Q}{20QQ}$. Itẽ $\frac{6R}{7Q}$ in in $\frac{12R}{11C}$ faciunt $\frac{72Q}{77QC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{3Q + 4R}{5C}$ in $\frac{4Q}{3C}$ fiunt $\frac{12QQ + 16C}{15CC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{7C - 4Q}{4Q + 2R}$ in $\frac{7R}{4Q}$ fiunt $\frac{49QQ - 28C}{16QQ + 8C}$. Insuper ex $\frac{15QQ + 3C}{7QCC}$ in 10R, fiunt $\frac{150QC + 30QQ}{7QCC}$, iuxta Diophantum.

Quapropter multiplicatio fractionum numerorum denominatorum non est dissimilis illi, quæ fit in numeris vulgaribus fractis; habita ratione perpetuò signorũ +, & —, potestatumq; , siuè dignitatum characterum.

Demonstratio sic se habet. Propositæ sint fractiones AB, CD: ductis numeratore in numeratorem, denominatore i denominatorem, fiat EF; vt E, sit numerator, & F, denominator. Quoniam autem ratio fractionis EF, ad CD, componitur ex rationibus numeri E, ad numerum C, & D, ad F, & ratio fractionis AB, ad ipsam vnitatem, seu ad integrum componitur, ex ratione numeri A, ad vnitatem ipsam, & ex ratione vnitatis ad numerum B: at verò per definitionem multiplicationis numerorum, vt A, numerus est ad vnitatem, sic numerus E, ad numerum C; & vt vnitas ad numerum B, sic numerus D, ad numerum F: ergo ex æquali [a], erit EF, ad CD, vt AB, multiplicans ad vnitatem, siuè ad integrum: ergo EF, erit proueniens ex ductu AB, multiplicantis in CD, multiplicatam. *Demonstratio multiplicationis.* *a 22. quinti.*

$\frac{A\ 3}{B\ 7}$	$\frac{C\ 4}{D\ 5}$
$\frac{E\ 12}{F\ 35}$	$\frac{G\ 60}{H\ 140}$

Aliter. Facta multiplicatione numeratorum, & denominatorum, vt supra, producatur EF: mox ducatur F, in C, vt fiat H; & D, in E, vt fiat G: erit igitur per ea, quæ à nobis ostensa sunt alibi, vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H: cumq; C, multiplicans A, F, faciat E, H; erit *Aliter idē ostenditur.*

a 17. septimi. b 16. septimi. c 17. septimi. d 23. quinti.

erit[a], vt A, ad F, sic E, ad H; & permutando[b], vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, B, facit G, & F; ergo erit[c], vt E, ad B, ita G, ad F: igitur ex æqualitate perturbata erit[d], vt A, ad B, sic G, ad H: at verò vt G, ad H, ita minutia EF, ad minutiam CD: & vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, seu ad vnum: ergo vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad vnum, seu ad integrum, &c.

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \qquad \frac{C\ 4}{D\ 5} \qquad \frac{E\ 12}{F\ 35}$$

H 140 G 60

A	E	B
G	F	H

Diuisio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO QVARTA.

Diuisionis præcepta explicatur.

MVltiplicetur numerator fractionis diuidendæ, per denominatorem fractionis diuidentis; & prouenicns supra lineam scribatur: deinde ducatur denominator fractionis diuidendæ, in numeros fractionis diuidentis; productus numerus, sub linea ponatur, vt emergat fractio, quæ erit quotiens quæsitus.

Exempla ad maiorẽ explicationem præceptorum.

Vt $\frac{12Q + 6R}{5C}$ diuidere debeamus per $\frac{4R}{5}$, fit quotiens $\frac{60Q + 30R}{20QQ}$. Præterea si diuidere debeamus $\frac{6R}{8Q}$ per $\frac{4R}{5C}$, fiet quotiens $\frac{30QQ}{32C}$. Insuper diuisa fractione $\frac{6C - 5Q}{4QC}$ per $\frac{5R}{7QQ}$, fiet quotiens $\frac{42QQC - 35CC}{20CC}$ iuxta Diophantum, & ita de reliquis.

Demõstratio.

Demonstratio ita se habet. Fractio diuidenda sit AB, & diuidens CD: ducatur D, in A, & proueniat E; insuper C, du-

C, ducatur in B, & fiat F: vt ita quotiens fit EF, cuius numerator E, denominator F. Quoniam ergo proportio fractionis AB, ad fractionem EF, componitur ex ratione numeri A, ad E, & ex ratione numeri F, ad B; & vt A, ad E, sic vnitas ad D, & sicut F, ad B, ita C, ad vnitatem: ratio verò fractionis C, D, ad vnitatem, vel integrum, componitur ex ratione numeri C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D: ergo erit ex æquo ratio fractionis AB, ad EF, vt CD, ad vnitatem, siuè ad integrum; ergo per definitionem diuisionis, diuisa fractione AB, per CD, emergit EF, pro quotiente.

$$\frac{A\ 12}{B\ 15} \qquad \frac{2\ C}{7\ D}$$

$$\frac{E\ 84}{F\ 30}$$

Breuiùs. Ratio AB, ad EF, componitur ex ratione A, ad E, & F, ad B: vt verò A, ad E, sic vnitas ad D; & vt F, ad B, sic C, ad vnitatem: ratio autem CD, ad vnitatem, vel ad integrum, componitur ex C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D: ergo ex æquo ratio AB, ad EF, erit vt CD, ad vnitatem, seu ad integrum: ergo diuisa fractione AB, per CD, emerget EF.

Compendiosiùs eadem demonstratio traditur.

Aliter. Sit minutia AB, diuidenda per minutiam CD, & primò quidem huius, numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; itaut diuiso A per C, quotiens sit E, & diuiso B, per D, quotiens sit F. Dico minutiam EF, esse quotientem diuisionis minutiæ AB, per CD, minutiam. Quoniam C, metitur A, per E, & D, metitur B, per F; producetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F: ob id minutia AB, producta erit ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD: quamobrem ex definitione multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad vnum: cum itaq; sit, vt AB, minutia diuisa, ad CD, mi-

Aliter ipsius diuisionis operatio ostenditur.

$$\frac{A\ 12}{B\ 16} \qquad \frac{C\ 3}{D\ 8} \qquad \frac{E\ 4}{F\ 2}$$

nutiam diuidentem; ita minutia EF, ad vnum; erit ob id ex definitione diuisionis, minutia EF, quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD, quod ostendendum erat.

Quod si numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB; reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod fiet si K, ex C, in D, procreatus ducatur

$$\frac{E\ 24}{F\ 36} \qquad \frac{A\ 2}{B\ 3} \qquad K\ 15 \qquad \frac{C\ 3}{D\ 4} \qquad \frac{G\ 8}{H\ 9}$$

$$\frac{E\ 90}{F\ 135} \qquad \frac{A\ 6}{B\ 9} \qquad K\ 12 \qquad \frac{C\ 3}{D\ 5} \qquad \frac{G\ 30}{H\ 27}$$

in A, B, vt gignantur E, F. Quoniam itaq; C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, quod est propositum, &c.

Algorithmus irrationalium fractionum denominatorũ patet ex dictis.

Non est autem, cur hìc immoremur in explicando Algorithmo numerorum irrationalium fractionum denominatarum; facilè namq; ex dictis intelligi possunt, quæ circa ipsas occurrunt: qua verò arte probentur operationes istæ patet; siquidem explicuimus Additionem, Subtractionem, itemq; multiplicationem, diuisionem se mutuò probare.

S C H O L I O N.

Animaduersio.

IN superioribus demonstrationibus, præter Vnitatem hoc verbum, Integrum, ubi opus erat, adiecimus: siquidem minutiæ sunt fractiones, siuè particulæ, vel vnitatis, vel cuiusspiam numeri. Non enim in ea sumus sententia, vt existimemus, eas re-

spe-

ſpectu ſolius vnitatis, eſſe accipiendas: qui enim hoc ſibi perſuaſum habuerunt, certè decepti ſunt; vt alibi demonſtrauimus, cum de minutijs in Arithmetica tractaremus.

De extractione Radicum numerorum denominatorum, ſeu numerorum, cum dignitatibus, vel poteſtatibus.

CAPVT V.

ALibi docuimus, ex aliquo numero radicem extrahere, nil aliud eſſe, quàm reperire numerum aliquem, qui ſi in ſe multiplicetur iuxta radicis naturam quæſitæ, numerum producat illum, à quo radix eſt eruenda. Ita cum dignitatibus, &c. nil aliud erit, quàm exhibere numerum cum aliqua dignitate, qui numerum producat dignitate affectum, à quo radix extrahi debet, ſi in ſe ducatur, iuxta radicis naturam, nempè quadratè, ſi fuerit radix quadrata, cubicè ſi cubica, & ita de ſingulis.

Radicum numerorũ denominatorũ extractio, quid ſit.

Non eſt autem cur hic ſermonem habeamus de methodo extrahendi radices à vulgaribus numeris; de his enim ſuo loco ſatis, ni fallor, loquuti ſumus: nunc ad rem noſtram accedamus; & primò de numeris ſimplicibus cum poteſtatibus, qua nimirum arte radices extrahantur ex ipſis.

Radicũ extractio ex numeris vulgaribus alibi tractanda.

Si ſit iniunctum radices extrahere ex aliquo numero cum dignitate, loquendo, vt diximus de numero denominato ſimplici: ſumatur propoſita radix illius numeri, relicto charactere, perinde ac ſi abſolutus eſſet: mox verò exponens characteris eiuſdẽ numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix quæſita denominatur. Exempli gratia. Sit iniunctum radicem quadratam extrahere ex numero 16Q: accepta radice quadrata numeri 16, nempe 4; diuidatur exponens huius characteris Q, per expo-

Radicũ numerorũ denominatorum extractio qua arte fiat.

ponentem, characteris Q, à quo nimirum ipsa radix mutuatur appellationem: diuidatur ergo numerus 2, per 2, fit quotiens 1, & exponens characteris R; erit ergo ℞ Q, numeri 16 Q, numerus 4 R. Eodem pacto si quæratur ℞, numeri 64 CC; latus quadratum numeri est 8: & diuiso 6, exponente characteris CC, per 2, exponentem Q, à quo sumit radix appellationem; fiet quotiens 3, exponens characteris C: dicemus ergo latus quadratum numeri 64 CC, esse 8 C; & hoc in via Diophanti. Secundum alios non haberet radicem quadratam: cum exponens 9, secundum ipsos, characteris CC, non possit diuidi per 2; & fieri quotiens integer, &c. Insuper ℞ C, numeri 125 C, erit 5 R: siquidem numeri 125, est 5; & diuiso 3, exponente characteris C, per 3, exponentem characteris ℞, quæsitæ, fit 1, exponens ipsius R. Insuper ℞ Q, numeri 36 QQ, erit 6 Q. Item quadrato-quadrata numeri 81 QCC, secundum Diophantum, est 3 Q; & secundum alios, numeri 81 QQQ, erit idem 3 Q: & ita de singulis, &c.

Aliter idē efficere. Aliter. Sumatur (loquendo de radice quadrata) radix quadrata numeri, & ei apponatur character; cuius exponens, est dimidium characteris denominati.

℞ C extractio. Si sit extrahenda ℞ C: sumatur latus cubicum numeri, & ei apponatur character; cuius exponens est tertia pars exponentis characteris numeri, cuius latus quæritur, &c.

℞ Q Q extractio. Si quæratur latus quadrato-quadratum: accepto latere numeri, quarta pars exponentis sumatur. *℞ Q C extractio.* Si quæratur ℞ QC: sumpto numeri latere, accipiatur quinta pars exponentis, &c.

Quando autem numerus habet quidem radicem quadratam, vel cubicam, vel quadrato-quadratam, &c; sed *Per primū modum.* instituta diuisione (per primum modum) exponentium in quotiente, non emergit numerus integer: vel (per secundum modum) si loquamur de ℞ Q, exponens *Per secundū modū.* nequit diuidi in duas partes æquales; si de ℞ C, in tres; si de ℞ QQ, in quatuor; si de ℞ QC, in quinque, &c: in huiusmodi casibus clauduntur numeri cum characteribus

intra

intra parenthesim, præposito charactere radicis extrahendæ, nempè quadratæ, cubicæ, &c. Vt si ex 4 C, extrahi quadratum latus deberet; illud foret ℞ (4C). si ex 16QC; esset ℞ (16QC). Et ita de reliquis, cum numerus non hebet latus: vt numeri 13C, latus quadratum erit ℞ (13C): item numeri 28QC, latus quadratum erit ℞ (28QC): insuper latus cubicum numeri 27Q, erit ℞C (27Q): item latus cubicum numeri 64QQ, erit ℞C (64QQ): præterea numeri 35Q, erit ℞C (35Q): insuper numeri 72QQ, erit ℞C, (72QQ): & ita de singulis, cum etiam numeri latere carent.

At verò si numerus non habet radicem; & dignitatis exponens diuidi potest per exponentem characteris, à quo radix denominatur, sic vt in quotiente non prosiliat fractio, per primum modum: vel per secundum modum, exponens diuidi potest in duas, vel tres, vel quatuor, &c. prout opus fuerit, æquales partes. Præponatur numero signum radicale; & ei apponatur character debitus quotienti emergenti ex diuisione exponentium, vel dimidio, aut tertiæ, aut quartæ parti, &c. prout opus fuerit. Proinde ℞Q, numeri 20Q, erit ℞20R: insuper ℞C, numeri 40CC, erit ℞C40Q, & numeri 50CCC, erit ℞C50C. Quod si neq; ex numero, neq; ex potestate radix erui potest, arte eadem res expediri debet. Itaq; latus cubicum numeri 35Q, erit ℞C (35Q) item numeri 50QQ, erit ℞C (50QQ): nimirum clauduntur numeri intra paernthesim, vt supra dictum fuit.

Quãdo numerus non habet radicẽ, & dignitatis exponens diuidi potest per exponẽtem characteris à quo radix denominatur.

Quando nec ex numero, nec ex potestate latus erui potest.

Nunc reliquum est, vt verba faciamus de extractione radicum ex numeris compositis cum dignitatibus: in cuius gratiam aduertendum est numeros istos quandoq; rationales, quandoq; irrationales esse.

Radicum extractio ex numeris compositis.

Si fuerint irrationales, clauduntur intra parenthesim, & fient radices vniuersales. Vt si quæratur ℞Q, huius numeri 15C + 7Q + 4R; ea erit ℞ (15C + 7Q + 4R): & si sit in quæstione ℞C, numeri 18Q + 14R + 3; erit ℞C (18Q + 14R + 3): Item ℞Q, huius numeri 12C + 7Q − 3R, erit

Quando commemorati numeri fuerint irrationales, qua arte procedẽdum sit.

℞ (12

℞ (12C + 7Q — 3R): & ℞Q, numeri 38QQ + 42C + 27Q, erit ℞ (38QQ + 42C + 27Q): insuper numeri 7CC — ℞ 25 QC + 5QQ — ℞ 45QQ — ℞ 32C + 5Q, erit hæc; nimirum ℞ (7CC — ℞ 25QC + 5QQ — ℞ 45QQ — ℞ 32C + 5Q): & ita de reliquis.

Quando fuerint rationales, quid agendum.

Cum autem numeri fuerint rationales, extrahendaq; sit radix quæsita; quo pacto dignoscere possimus, num rationales, vel irrationales sint, expediet declarare. Pluribus autem modis, quoad radicem quadratam, id assequi possumus.

Methodus extractionis, & primò quid obseruandum.

Primò aduertendo num compositus numerus, ex illis, qui constituunt numerum, cuius latus quæritur, rationalis fuerit: tunc n. numerus rationalis est. Vt 4Q + 20R + 25, rationalis est; etenim horum numerorum summa est 49, cuius latus quadratum est 7: item 16Q + 20R + 25, rationalis est; cum summa sit 81, numerus rationalis, cuius latus est 9: & ita de reliquis.

Quid secũdò in extractione sit obseruãdum.

Secundò cognoscitur, quia si numerus compositus rationalis fuerit, cuius radix quadrata quæritur, oportet esse trinomium: si latus, binomium est: si verò latus fuerit trinomium; necesse est numerum esse quinquinomium: si latus est quattrinomium, necesse est numerum esse septinomium: si quinquinomium, numerum oportet esse nouinomium.

Quid tertiò expediat obseruare.

Tertiò dignoscitur designatione punctorũ: si rationalis fuerit, designatis prima, & secunda figura ad sinistrã, deinde alternatim; necesse est postremũ remanere sine puncto.

His consideratis iniunctum sit latus extrahere quadratum ex hoc trinomio 4Q + 20R + 25, quod esse rationale dicebamus. Sumatur latus quadratum primi numeri 4, nempe 2; & 1, dimidium numeri 2, exponentis Q: ipsi verò 1, tanquam exponenti debetur R. Itaque erit prima figu-

Lateris indagatio. 2 ? + 5

4Q + 20R + 25	2R + 5
4Q + 20R + 25	
0 0 0	

gu-

gura 2 R, quę ponatur à latere vt vides; huius quadratum est 4 Q, quo sublato ex 4 Q, remanet 0. Deinde ad habendam secũdam figuram, duplicetur 2 R, prima figura, & fiunt 4 R: per hunc autem numerum diuidere debemus sequentem numerum 20 R, hoc est, periculum faciendum erit, quoties 20 R, complectuntur 4 R; & reperiemus 5: subtrahamus 1, exponentem R, ab 1, exponente eiusdem R, & ita remanebit 0: ita ut 5, sit numerus absolutus pro secunda figura. Cumq; ✠ per ✠ emergat ✠; erit latus quadratum quæsitum 2 R ✠ 5. Modò ducatur 5, in 4 R, duplum primæ figuræ; fiunt 20 R: subtractis 20 R, remanet 0. Mox verò subtrahatur numerus 25, quadratum secundæ figuræ, abs 25, vltimo numero, & remanet 0: proinde latus quæsitum erit 2 R ✠ 5. Probatio verò fit, ducendo quadratè latus in se, vt hic cernere licet.

Operationis comprobatio.

	2 R	✠	5
	2 R	✠	5
	10 R	✠	25
4 Q ✠	10 R		
4 Q ✠	20 R	✠	25

Constat autem hunc extractionis modum persimilem esse illi, quo radices numerorum vulgarium extrahuntur.

Operationis demonstratio.

Demonstratio in hoc sita est, quod numerus, cuius latus quadratum quæritur, componitur ex quadrato primæ figuræ lateris extrahendi, plus numero facto sub duplo primæ figuræ in figuram secundam, & quadrato secundæ figuræ. Quo autem pacto se habet synthesis, eodem etiam se habet analysis: extrahere nãque radicem, est resoluere numerum in partes, ex quibus coalescit.

4	27
28	27
49	189
729	54
	729
	2 7

Idq; declaratur in adiuncto paradigmate

Declaratio supradictorum. te. Poterit autem quisque in omnibus alijs numeris, ita procedere in inuestigando latere quadrato, quando etiam latus ex pluribus, quàm ex duobus figuris constaret: & ex ijs, quæ diximus facilè deduci potest, quid agendum in numeris irrationalibus.

	225
	225
484	1125
220	450
25	450
50625	50625

Radicis cubicæ extractio. Nunc de radicis cubicæ extractione ex ijsdem numeris compositis cum dignitatibus, verba faciemus. Primò autem videndum est, num numerus ipse rationalis sit, quod ità cognoscemus. Examinandum est, num ipsa numerorum summa sit rationalis, nec ne: si namq; rationalis fuerit; erit etiam rationalis numerus cum dignitatibus. Secundò si rationalis fuerit, quando notantur punctis figuræ, initio facto à dextris versùs sinistram, duabus figuris intermissis, tertia queq; si notetur, in vltima figura cadat punctum postremum. Demum si latus constat ex duobus figuris, numerus componitur ex quatuor figuris; si verò tres habet figuras, numerus componitur ex septem.

	225

Ex quadrinomio qua methodo radix extrahatur primæ figuræ indagatio. Propositum sit quadrinomium istud, nimirum 8C + 60 Q + 150R + 125, cuius latus cubicum quæritur. Sumatur latus cubicum primæ figuræ 8, cuius radix est 2, & tertia pars numeri 3, exponentis characteris C, est 1, qui est exponens Radicis: erit ergo prima lateris figura 2 R, cuius cubu 8 C: Si subtrahamus ab 8 C, remanebit 0.

Secunda figura inuentio. Pro secunda figura triplicetur 4, quadratum primæ figuræ; triplum autem est 12 Q; & per 12 Q diuidere oportet 60 Q, fit quotiens numerus absolutus 5: ducantur 12 Q, in 5, fiunt 60 Q, quibus sublatis ab 60 Q, remanet 0: deinde multiplicetur 75, triplum quadrati secundæ figuræ 5, in 2 R, fiet productum 150 R; quod abs

abs 150 R, si auferatur, remanebit o. Demum cubus secundæ figuræ 5, nempe 125, subtrahatur abs 125, & remanebit o. Operationis autem examen, scilicet rectè fuisse institutam, colligitur ope multiplicationis, nempe ducendo latus illud inuentum, cubicè &c. Non dissimili arte procedendum erit in alijs numeris propositis, & etiam in numeris surdis.

Demõstratio.

Demonstratio in eo sita est, quod cubus numerus cõponitur ex cubo primæ figuræ, plus triplo quadrati eiusdem primæ figuræ in secundam figuram, plus triplo primæ figuræ, plus cubo secundæ: vt patet ex hoc exemplo.

8	25
60	25
150	125
125	50
15625	625
	25
	3125
	1250
	15625

Quãdo latus cõstiterit ex pluribus figuris, quã duabus.

Ita etiam si latus cõstiterit ex pluribus figuris, quam duabus; vt si extrahi deberet latus cubicum ex hoc septinomio 8 CC + 36 QC + 78 QQ + 99 C + 78 Q + 36 R + 8. Sumatur enim latus primi termini 8 CC; quod latus erit 2 Q: eius autem cubo 8 CC, subtracto ex 8 CC, remanet o. Deinde per huius quadrati triplum, nempe 12 QQ, diuidantur 36 QC; fiet quotiens 3 R: & est secunda lateris figura. Modo ducantur 12 QQ, in 3 R; fiunt 36 QC: quibus sublatis abs 36 QC, remanebit o. Nunc autem subtrahere debemus 27 Q, triplum quadrati ipsius 3 R, ductum in primam figuram 2 Q, nempe 54 QQ, ab 78 QQ: & remanebit 24 QQ. Subtrahamus 27 C, cubum secundæ figuræ 3 R, ab 99 C; & remanebunt 72 C: quibus si addantur 78 Q, fiet 24 QQ + 72 C + 78 Q.

Nunc inquirenda est secunda figura. Dico autem secundam; quoniam duæ priores nunc per modum vnius sumuntur.

Accipiatur 4 QQ + 12 C + 9 Q, quadratum primæ figuræ 2 Q + 3 R; & eius triplum, 12 QQ + 36 C + 27 Q. Per hoc trinomium multiplicetur 24 QQ + 72 C + 78 Q; & fiet quotiens 2, numerus absolutus: modò si singula mēbra, nempe 12 QQ, 36 C, & 27 Q, ducantur in 2; fient producta 24 QQ, 72 C, & 54 Q: quibus subtractis à 24 QQ + 72 C + 78 Q, habita ratione signorum + & —, remanebit 0; præter quam in 78 Q, remanebunt enim 24 Q: his addantur 36 R, & fiet 24 Q + 36 R. Ex hac subtrahere debemus triplum quadrati secundæ figuræ 2, nempe 12, ductum in primam figuram 2 Q + 3 R: cuius productum est 24 Q + 36 R. quo subtracto ex 24 Q + 36 R, remanet 0. Modò ex 8, postrema numeri nota, subtrahamus cubum huius secundæ figuræ 2, nempe 8; & remanebit 0.

Secunda figura inquisitio.

		2 Q +	3 R
		2 Q +	3 R
		6 C +	9 Q
	4 QQ +	6 C	
	4 QQ +	12 C +	9 Q
			3
	12 QQ +	36 C +	27 Q

Quod attinet ad radicem quadrato quadratā, videndum est, num ille numerus, cuius ℞ QQ quæritur, sit rationalis. Id autem cognoscemus aduertendo, an si compositus numerus ex illas constituentibus, sit rationalis; item vt habeat radicē quadrato-quadratā. Tunc enim rationalis erit numerus, cuius queritur latus. Secundò si latus duas habet figuras, numerus debet habere quinque; si tres, debet habere nouem; & ita deinceps sentiendum est in vlterioribus, vt quisq; conijciet.

Radicis quadrato-quadratæ inuentio.

Deinde si rationalis fuerit, dum signentur notæ punctis hoc ordine, facto initio à dextris, quinta quæq; si notetur figura, tribus intermissis, in postrema ad sinistram cadat vltimum punctum. Deinde in extractione procedatur, vt supra; naturam tamen radicis extrahendæ, nimirum QQ; obseruando.

Non

Non dissimili modo procedendum erit in radicibus quadrato-cubicis, Cubo-cubicis &c. habita ratione naturę singularum radicum.

De secundis Radicibus, earumque Algorithmo.

CAPVT VI.

NOn inutiliter excogitatas fuisse radices secundas, constabit profectò ex Problematum resolutionibus, in quibus illas opus est adhibere: cum enim duo, tres, vel plures quęruntur numeri, sub incerta ratione, & pro primo posita est 1 R; non est oportunum pro secundo iterum 1 R, ponere, & sic pro tertio. &c: ob id eas excogitarunt Artifices, quas aliqui quantitates surdas, alij quantitates simplices, aut absolutas appellauere, & his vsi sunt characteribus 1 Q, 2 Q &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates &c. Verùm quia 1 R, pretium primo loco positæ diuersum est à radice, secundo loco, & tertio loco posita &c; nisi characteribus distinguerentur, facilè confusio suboriretur, & ita in operationibus radices ipsę confunderentur, quo factum, est, vt secundæ radices inuenirentur: nisi verò alijs characteribus designarentur, in eadem essemus difficultate: proinde visum est alijs, secundas radices Alphabeti notis designare; atq; adeo ad denotandam radicem secundam distinctam ab ea, quæ primo loco posita est, ita scribunt 1 A; & ad designandam radicem secundam distinctam à duabus, primo, & secundo loco positis, hoc vtuntur charactere 1 B; & ita deinceps. &c. *Secundarũ radicum algorithmus. Explicatur finis ob quẽ secunda radices adinuenta fuerint.*

Harum autem radicum numeratio sic se habet: 1 A, vna secunda radix; 3 A, tres secundæ radices &c. Cum autem numero duo signa annectuntur: intelligitur numerus cum priori charactere, ductus in vnitatem posterioris signi: itaq; 1 R A, significat 1 R ductam in 1 A; & 5 R A, significat *Secundarũ radicum numeratio, quo pacto se habeat.*

cat 5 R, ductas in 1 A; item 1 Q A, significat 1 Q, ductũ in 1 A; & 5 Q A, denotat, 5 Q, ducta in 1 A; similiter 1 Q A Q, significat 1 Q, ductum in 1 A Q.

Secundarum Radicum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Additionis præcepta. Quãdo radices secundæ sunt eiusdem generis.

ADditionis perficiẽdæ forma hæc est. Si secundæ radices fuerint eiusdem generis; addantur numeri inter se; & idem summæ numerorum appingatur character secundę radicis. Itaque ex additione 5 A, ad 10 A, fiunt 15 A; & ex 5 B, ad 10 B, fiunt 15 B; & ita de reliquis.

Quando nõ sunt generis eiusdem.

Cum autem secundæ radices non fuerint eiusdem generis; fit additio beneficio signi ✠: vt ex 5 A, ad 10 B, fieret summa 5 A ✠ 10 B; & ex 3 R, ad 5 A, fieret summa 3 R ✠ 5 A; & ita de reliquis sentiendum est.

Secundarum Radicum subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

Subtractionis præcepta.

SVbtractio hac arte fiet. Si radices fuerint eiusdem generis, fit subtrahendo numerum à numero, & reliquo numero eundem characterem apponendo.

Vt ex 10 A, subtrahantur 4 A, remanebunt 6 A, & ex 12 B, sublatis 5 B, remanebunt 7 B. Quod si secundæ radices diuersæ fuerunt, fiet subtractio beneficio signi —. Itaq; si 6 B, subtrahere debeamus ex 10 A, remanebunt 10 A — 6 B, & ita de reliquis. &c.

Secundarum Radicum multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

AD multiplicationem quod attinet, ita procedendum est. Cum numerus primæ radicis multiplicandus est per numerum secundæ radicis signatæ solùm nota A, vel B, vel alia &c: multiplicari debent numeri inter se, & eadem signa apponi: exempli gratia, ex 1 R, in 1 A, fit 1 R A; hoc est, 1 R, ducta in 1 A: & ex 1 Q, in 1 A Q, fit 1 Q A Q; hoc est, 1 Q, ductum in 1 A Q. ex 4 R, in 3 A, fiunt 12 R A; hoc est, quatuor primæ radices ductæ in 3 A: ita pariter ex 5 A, in 5 R, fiunt 25 A R; nempe 25 A, ductæ in 1 R: ita ex 6 Q, in 4 B, fiunt 24 Q B, hoc est 24 Q, ducta in 4 B, &c.

Multiplicationis præcepta.

Multiplicationis exempla.

Cum autem absolutus numerus in numerum secundæ radicis ducitur, fit secundę radicis numerus: vt ex 8, in 4 B, fiunt 32 B: ex 9 in 5 C, fiunt 45 C &c. Si verò numerus secundę radicis ducendus sit in numerum secundæ radicis litteræ diuersę; ducatur numerus in numerum, productoque eędem apponantur litteræ: sic ex 5 A, in 8 B, fiunt 40 A B: nimirum 40 A, multiplicatæ per 1 B.

Absolutus per secundam radicem.

Secundæ radices diuersæ litteræ inter se.

Cum autem secundæ radicis numerus ducitur in numerum secundæ radicis eiusdem litteræ, producitur character Q; ita tamen, vt eadem præponatur littera: itaq; ex 4 A, in 6 A, fiunt 24 A Q.

Secũdæ radices eiusdem litteræ inter se.

Cum numerus secundæ radicis ducitur in se, quadratè, vel cubicè &c. producitur character Q vel C, &c. præposita tamen eadem littera. Itaq; 1 A, in se multiplicata facit 1 A Q, hoc est vnum quadratum secundæ radicis: sensus enim est, vnam secundam radicem esse quadratè multiplicatam. Secundò ex 1 Q A, in 1 Q A, fit 1 Q A Q; hoc est, 1 Q, primæ radicis ductum in 1 Q, secundæ radicis. Ita 1 A, in se cubicè, facit 1 A C: & 2 A, in sę cubicè, faciunt 8 A C; sic de B, vel C, &c.

Secũdæ radices in se quadratè, vel cubicè.

Quan-

Quãdo numerus secũdæ radicis ducitur in numerum alium eiusdem secundæ radicis.

Quando verò secundæ radicis numerus ducitur in numerum alium eiusdem secundæ radicis, quę habeat characterem denominatum; primus numerus intelligitur habere characterem R: itaq; ex 1 A, in 1 AQ fiet 1 AC; & ex 3 A, in 3 AQ, fient 9 AC.

Quando numerus denominatus simplex absq; nota radicis secundæ multiplicatur in numerũ signatum littera, & signo denominato.

Cum autem numerus denominatus simplex absq; nota radicis secundæ multiplicatur in numerum signatum littera, & signo denominato; ducitur numerus in numerum, productoq; eadem apponuntur signa: vt ex 4 C, in 5 AQ, fiunt 20 CAQ hoc est, 20 C, ducti in 1 AQ: nempe volumus significare 20 C, ductos fuisse in 1 AQ: ita ex 2 C, in 3 CAQ, fient 6 CCAQ: Item ex 1 C, in 1 RAQ, fit 1 QQAQ; hoc est, 1 QQ, ductus in 1 AQ: quantum quoque fit, si 1 QA, ducatur in se quadratè; namque ex 1 Q in se fit 1 QQ, ex 1 A in se, fit 1 AQ.

Cum numerus post litteram secundæ radicis gerens signum dignitatis ducitur in numerum, qui post eandem litteram secunda radicis gerit quoq; dignitatis signũ: quod preueniat.

Cum numerus post litteram secundæ radicis, gerens signum dignitatis, in numerum ducitur, qui post eamdem litteram secundæ radicis gerit quoq; signum dignitatis; producitur numerus cum charactere, quem exponentes characterum dant; & ei præponi debet littera eadem radicis secundæ.

Quamobrem ex 3 AR, in 7 AC, fiunt 21 AQQ. Insuper ex 4 AQ, in 5 AC, fiunt 20 AQC, secundum Diophantum, qui ex Q, in C, putat fieri QC: secundum alios fit SS, nempe primus relatus, atq; adeo fieret 20 ASS.

At verò cum numerus post litteram secundę radicis, gerens potestatis characterem, in numerum ducitur, qui post characterem potestatis habet litteram quoq; secunda radicis: producitur numerus, cum posteriori charactere dignitatis, quem secundæ radicis littera sequitur. Mox autem character potestatis apponitur, qui emergit, producitur q; ex priori charactere in litteram secunda radicis; non secus ac si gereret signum, & characterem R: itaq; ex 2 AC, in 3 QA, fiunt 6 QAQQ: item ex 1 R, AQ, in 1 RAQ, fit 1 QAQQ; hoc est 1 RAQ, quadratè multiplicata in se, facit 1 QAQQ, &c.

Se-

Secundarum Radicum Diuisio.

OPERATIO QVARTA.

QVo verò pacto debeat secundarum radicum institui diuisio, relinquitur explicandum. Priùs autem fieri debet reductio characterum dignitatum, per subtractionem similium characterum. Itaq; si diuidantur 12RAQ, per 4AQ; reducantur characteres: & erunt diuidendæ 12R, per 4; & fiet quotiens 3R. Insuper ex diuisione 10CAQ, per 5AQ, fiet quotiens 2C; prius scilicet reductis signis: sic etiam si diuidantur 10CAQ, per 5C, fiet quotiens 2AQ. *Præcepta diuisionis.*

Si verò R, diuidi debet per numerum secundarum radicum, vt 12R, per 4A, fit fractio pro quotiente, & erit $\frac{12R}{4A}$. Insuper ex diuisione 20R, per 5B, fiet $\frac{20R}{5B}$.

Comprobantur autem operationes istæ iam dictæ scilicet multiplicatio, & diuisio, resolutione ipsarum radicum, tàm primarum, quàm secundarum, iuxta aliquam radicis extimationem. Itaq; supponamus 1R, pretium esse 2, & 1A esse 4. Si diximus ex 3R, in 3A, fieri 9RA, non malè diximus; etenim supposito 1R, pretio 2, pretium 3R, erit 6: & quia 1A, pretium dicimus esse 4, ergo 3A, pretium erit 12. Modo si ducantur 6, in 2, fient 72: constat autem tantum esse pretium ipsarum 9RA; nam 9R, pretium est 18; qui numerus si ducatur in pretium A, videlicet 4, fiet productum 72. Et ita poterit non dissimili modo in reliquis casibus institui probatio, necnon facilè demonstrari. *Supradictarũ operationum comprobatio.*

Vel si supponamus 1R, pretium 2, & 1A, pretium 3; ergo 3R, pretium erit 6: & quia 1A, pretium dicebamus esse 3; ergo 3A, pretium erit 9: his ductis in 6, fiunt 54: constat autem etiam 9RA, valere 54, si explicetur secundum earundem radicum extimationem. Huic autem resolutioni plurimum inseruit subiecta tabella.

Vel

	R	Q	C	QQ	SS	QC	BSS	QQQ	CC	QSS	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	203	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Vel iuxta Diophantum, vt videre licet in adiuncta tabella, quæ ſicuti præcedens poteſt in infinitum protrahi.

	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
1	3	9	27	81	243	729	2187	656	19683	59049	177147

Rectè igitur diceremus ex 2 R, in 3 A, fieri 6RA; ideſt, 6R, ductas in 1A: ſi namq; 1 R, valor dicatur 2, & 1 A, dicatur 3; iam 2R, reſolutæ facient 4, & 3 A, facient 9: at verò 4, in 9, faciunt 36; quantum etiam faciunt 6R, nempe 12, ductæ in 1 A, nimirum 3.

Declaratur superior doctrina. Sic etiam ex 3A, in 2R, fieri 6AR, hoc eſt 6 A, ductas in 1R, liquet ex eo quia 3A, ſunt 9, & 2 R, ſunt 4: at verò ex 9, in 4, fiunt 36; quantum ſcilicet faciunt 6A, ideſt 18, in 1R, nempe in 2.

Si verò multiplicaremus 1R, in 1A, produceremus 1RA; quia 1R, eſt 2, & 1A, eſt 3: fiunt autem 6, ex 2, in 3; quantum planè fit ex 1 R, ſcilicet ex 2, in 1 A, ideſt ex 3. Ita quoq; ex 1Q, in AQ, diceremus rectè fieri 1QAQ, nempe 1Q, ductum in 1AQ: nam 1Q, eſt 4, & 1AQ, eſt 9, ex 4, in 9, fiunt 36; quantum fit ex 1Q, nempe ex 4, in 1AQ, nimirum 9. Eodem ſanè modo poſſunt explicari alia exempla multiplicationis, itemq; diuiſionis, &c.

Vt

Vt ex diuisione 8CAQ, per 4AQ, fit quotiens 2C: siquidem 1R, pretium est 2, cubus erit 8; proinde 8 C, valebunt 64: at verò si 1 A, pretium est 3, ergo AQ, valebit 9; quamobrem 8 C, ducti in 1 AQ, valebunt 576: hic autem numerus si diuidatur per 4Q, secundæ radicis (dicebamus enim diuisorem esse 4AQ, hoc est 36) fiet quotiens 16, hoc est 2C.

Item ex diuisione 10 C AQ, per 5 C, fit quotiens 2 Q: nam diuidendo 720, per 40, fit quotiens 18; siquidem 10 CAQ, valent 720, & 5C, valent 40, &c.

Secundarum Radicum Extractio.

OPERATIO QVINTA.

ERuitur radix ex numero, si habet, eiq; littera secundæ radicis apponitur, reiecto charactere denominato, siue cossico. Vt radix quadrata numeri 36AQ, est 6A: insuper ℞C, numeri 9AC, est 3A: & ℞QQ, numeri 81DQQ, est 3D. *Radicum extractio ex secundis radicibus.*

Quod si numerus radicem non habet, vel character cossicus, non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda; tunc præponendum est toti numero cum littera, & charactere, signum radicale, illius nimirum radicis, quæ extrahi debet. Vt radix cubica huius numeri 5 AQ, erit ℞C 5AQ, vel radix cubica numeri 8AQ, erit ℞C8AQ, sicuti radix quadrata huius numeri 4AC, erit ℞Q4AC.

Cæterùm non dissimili modo, ac supra factum fuit, possunt explicari exempla huius operationis per numeros absolutos, iuxta aliquam radicis extimationem. Rectè namq; dicebamus, radicē numeri 36AQ esse 6A: propterea quod si 1A, valet 3, ergo AQ, valebit 9; proindè 36AQ, valebunt 324: quo fit vt si eius radix quadrata extrahatur, qualis est 18, habeatur valor istius numeri 6A; namq; cum 1A; valor sit 3, profectò 6A, valebunt 18, vt patet. Proindè

indè rectè dicebamus illius numeri 36AQ, radicem quadratam esse 6A. Non dissimili modo alia innumera exempla poterunt explicari.

De Æquatione Algebrica.

CAPVT VII.

Aequatio Algebrica quid sit.

TOtum Algebræ artificium consistit in explicanda æquatione, quæ nihil aliud est, quàm *Aequalitatis proportio inter duas quantitates, vel res varie denominatas, seu certam notam ex vna parte, ex alia incertam, & ignotam, &* vt loquitur Vieta, *est magnitudinis incerta cum certa comparatio.*

Definitionis explicatio.

Cum enim certam aliquam quantitatem cognoscimus, ex notitia illius deuenimus in cognitionem alterius illi æqualis; hoc enim pacto reperimus, quam progressionem Geometricam constituat quæsitus numerus, seu in quanam progressione numerus ille sortiatur locum vnitati proximum.

Requisitum ad commemoratam æquationē.

Cæterum æquatio de qua loquimur, necessariò debet esse inter variè denominata, & inter certum, & incertum, seu notum, & ignotum: siquidem inter ea, quæ sunt eiusdem denominationis, vel inutilis est, vt inter 10, & 10, vel inter 5R, & 5R; vel non est propriè æqualitas, vt inter 5, & 16. Aequatio verò de qua loquimur esset, si proponeremus 1R, pretium exempli gratia esse 5; tunc esset æquatio inter 10R, & 50: itaut si nos 1R, pretium lateret, & cognosceremus 10R, æquari 50; illico in 1R, pretij notitiam deueniremus: & ita de reliquis æqualitatis generibus intelligendum est. Debet itaq; æquatio ista esse proportio æqualitatis inter duas quantitates, siue res, quarum vna sit certa, & nota; altera incerta, & ignota: de his autem iterum in Algebra Speciosa loquemur.

Varia sunt autem huius æquationis genera: & primò vel

vel simplex est æquatio, vel composita. Potestas enim aut pura est, aut affecta. Pura autem, & simplex æquatio est, in qua vnus terminus, vni termino comparatur, cum affectione vacat: vt inter Q, & R; aut inter R, & N; aut Q, & N: & ita simplex etiam esset, 3 C ⨶ 24. Cum itaq; vnus terminus vni termino comparatur, simplex æquatio nuncupatur, tunc enim est pura potestas.

Aequatio simplex, vel composita. Potestas pura, vel affecta. Aequatio simplex quid.

Quando verò plures potestates, seu dignitates numero certo comparantur; maior dignitas propriè sibi hoc Potestatis vendicat nomen: & numerus cui dignitates comparantur, Homogeneum comparationis appellatur; vt etiam in simplici æquatione. Dignitates autem existentes in æquatione, Gradus parodici ad potestatem dicuntur: itaut ad cubum sint gradus parodici latus, & quadratum; gradus enim parodici sunt dignitates infra potestatem existentes in æquatione, quemadmodum dictum est.

Aequatio composita quid. Potestas. Homogeneum comparationis. Gradus parodici.

Potestas autem hoc modo se habens, Affecta dicitur. Hæc verò affectio, vel est per affirmationẽ, vel per negationem. Affectio per affirmationem fit per signum +, diciturq; Cataphatica affectio; per negationem fit per signum —, & Apophatica nuncupatur: at verò Amphibola, seu ambigua, cum dignitati maiori, siuè Potestati præfigitur signum —: quoniam hæc radix duplicem habet radicem, ideo Ambigua dicitur.

Affectio. Cataphatica. Apophatica. Amphibola.

Sed cum afficiens homogeneum de potestate negatur, negatio est directa, atque adeo æquatio est directa: vt 1 Q — 4 R ⨶ 165, hæc æquatio negatio directa est; minor enim dignitas R, gerit signum negatum —; vel quia homogeneum afficiens 4 R, de potestate negatur.

Negatio directa.

Cum autem contra potestas negatur de afficiente homogeneo sub gradu, negatio est inuersa: vt 14 R — 1 Q ⨶ 48, hæc æquatio inuersa, & ambigua est; siquidem dignitati maiori, nimirum 1 Q, signum negatum præfigitur, scilicet —; seu quia planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur mulcta quadrati: quia verò potestas de afficiente homogeneo sub gradu negatur, indirecta dicitur.

Negatio inuersa.

De his autem iterum in Algebra Speciosa agẽdum erit, scilicet de æquatione simplici absolutè, & de Climactica, & Polynomia.

Potestas tot affectionibus implicari potest, quot sunt gradus parodici ad potestatem.

Animaduertendum autem quot sunt gradus parodici ad potestatem, tot affectionibus posse potestatem implicari. Itaq; quadratum affici poterit, sub latere, seu radice; Cubus sub latere, & quadrato; insuper Quadrato-quadratum sub latere, quadrato, & cubo; præterea Quadrato-cubus, sub latere, quadrato, cubo, & Quadrato-quadrato; & ita deinceps.

Quot sint combinationes, quomodo cognoscatur.

Quot autem sint combinationes ita dignoscitur. Fiat progressio terminorum tot, quot sunt vnitates exponentis maioris dignitatis; & fiat ipsa in proportione dupla: à maiori termino ablata vnitate, remanet numerus, iuxta quẽ statui debet multiplicatio combinationum. Exempli gratia quæramus, quot combinationes habeat Quadratum: exponens eius est 2: ergo fiant duo termini in progressione dupla incipiente ab 1, & erit primus terminus 1, secundus 2: auferatur 1, abs 2, & remanebit 1; dicemus proinde Q vnicam habere combinationem, nimirum Q, R, & N. Quæratur numerus combinationum Cubi: eius exponens est 3: tres ergo termini fiant in progressione dupla, ducente initium ab 1; itaq; erunt 1, 2, 4: à termino maiori si auferatur 1, remanebit numerus 3, designans tres esse combinationes cubi; nempe C, Q, N; item C, R, N, Præterea C, Q, R, N. Et ita consimili modo procedendum est in reliquis dignitatum combinationibus.

Combinationes istæ multiplicantur ratione signorũ +, & —.

Multiplicantur autem hæ combinationes ratione figurarum +, & —: quo fit, vt Q, tres habeat combinationes; primam Q + R = N; secundam R + N = Q, seu Q — R = N, nam iuxta Vietæ sententiam omnes dignitates ex vna parte constituuntur; tertiam R = Q + N, seu R — Q = N. Ita etiam pluribus modis, ratione horum signorum, variantur reliquæ æquationes.

Cæterum illud est in primis aduertendum, nondum sincerã operationem, vel methodum inuentam esse explicandi di æquationes omnes compositas: sed tantùm illas, in quibus termini sunt Arithmeticè proportionales, seu habent eundem excessum; vt sunt infrascriptæ æquationes.

Nondum est adinuenta ars, qua æquationes omnes compositæ explicantur.

Q — R = N	2	1	0
Q + R = N	2	1	0
R — Q = N	1	2	0
QQ — Q = N	4	2	0
QQ + Q = N	4	2	0
Q — QQ = N	2	4	0
CC — C = N	6	3	0
CC + C = N	6	3	0
C — CC = N	3	6	0

Porrò si exponentes arithmeticè proportionales omnes sint maiores, quam 0, adhibendi sunt relicti, per subtractionem minimi numeri exponentis, vt reducantur ad illos, in quibus 0, interuenit.

At verò quando exponentes non seruant arithmeticam proportionem, seu non habent eundem excessum, vt C — Q = N, quorum exponentes sunt 3, 2, 0, & C — R = N, vbi exponentes sunt 3, 1, 0, & C — R = N, vbi exponentes sunt 3, 1, 0, & ita de reliquis, neque seruant eundem excessum; non fuit inuenta Ars hucusque, qua Radices harum Æquationum extrahantur: licet Vieta, & alij methodos quosdam generales tradiderint, quas inferiùs prosequemur: Quia tamen nec absolutissimæ, nec generalissimæ sunt; hinc est, vt in numeris irrationalibus locum non habeant; neq; in fractionibus exerceri possint; atque adeo methodi ipsæ sint potius tentatiuæ.

Quando exponentes non seruant arithmeticam proportionem.

Quando regulæ nouiter excogitatæ non inseruiant.

uæ, quàm absolutæ, vt videbimus. Cum enim 1 R pretium numerus est irrationalis, vel simplex, vel compositus, item numerus fractus; regulæ istę nouiter excogitatæ non satisfaciunt.

Quatuor sunt, in quibus consistit artificium explicãdarũ Aequationum.

Verùm Æquationum explicandarum artificium in pluribus consistit: quatuor tamen ad summum numero sunt, quæ ad id conducunt; primum Æquationis inuentio; secundum inuentæ Æquationis Antithesis, seu Reductio; tertium Parabolismus, seu Diuisio; quartum Analysis, siuè Radicis extractio.

Superiùs dicta explicantur.

Primò enim oportet Æquationem inuenire; secundò si opus fuerit, eandem æquationem reducere; tertiò æquationem partiri per numerum Potestatis, seu dignitatis elatioris; quartò demum cum opus fuerit, Radicem ex quotiente extrahere. Non hæc tamen omnia necessaria sunt, sed duo perpetuò requiruntur: Inuentio æquationis, & Diuisio. De his ergo singillatim agendum superest: & primò de Æquationis inuentione.

De Æquationis Inuentione.

CAPVT VIII.

Aequationis inuentio. Quid Analysta curare debeat.

QVocunq; proposito Problemate resoluendo, debet illud in primis Analysta curare, vt ad aliquam Aequationem perueniat: & vt hoc assequatur, pro quæsito numero ponat Radicem, aduertendo, quod si numerus quæsitus simplicem longitudinem importet, pro eo ponatur Radix; si sit numerus planus, ponatur Quadratum; si solidus, ponatur Cubus: deinde tractetur ipse numerus denominatus iuxta legem propositæ quæstionis, quod quisq; potius exercitatione, & vsu, quàm præceptis consequetur; aduertendo, quòd repertis tribus numeris proportionalibus, fiat æquatio inter quadratum medij, & factum sub extremis; si quatuor, inter factum

sub

sub extremis, & factum sub medijs: insuper si eidem, vel eisdem numeris inueniantur ignoti numeri æquales, fiant æquales inter se: & alia huiusmodi memoria teneat.

Sit datum resoluendum Problema.

Propositum numerum in duas partes diuidere, quarum data sit differentia. *Exemplum primum.*

Pono itaq; numerum diuidendum, e. g. esse 100, & differentiam datam esse 20. Pars minor propositi numeri esto 1R; maior ergo erit 1R+20: cum enim vna debeat alteram excedere data differentia 20, si pars vna est 1R, alia necessariò erit 1R+20: harum autem partium summa est 2R+20; quæ æquatur proposito numero diuidendo 100. Vide igitur qua arte tractari debeant numeri, iuxta quæstionis tenorem: est autem certum omnes partes simul sumptas æquari toti. Cum totum sit 100, necesse est harum partium summam 2R+20, æquari 100: & ita nos ad æqualitatem peruenimus. *Aequationis inuentio.*

Rursus propositum sit illud Problema resoluere.

Data summa duorum numerorum, & plano sub ipsis, reperire numeros. *Exemplum secundum.*

Data sit numerorum summa 15, & planum sub ipsis 50. Esto numerus vnus 1R, alter ob id erit 15—1R: idq; manifestum est, siquidem si è summa duorum numerorum, auferatur vnus, reliquus erit alter quæsitus. Planum autem sub his est 15R—1Q: & quia planum sub quæsitis numeris est 50; necesse est hoc planum 15R—1Q, æquari 50: & ita ad æqualitatem peruenimus.

Insuper propositum sit Problema.

Datum numerum in data ratione partiri. *Exemplū tertium.*

Datus sit numerus 35, & ratio, vt 2, ad 5. Esto numeri pars vna 1R, alia necessariò erit 35—1R: vt autem est 2, ad 5, ita debet esse 1R, ad 35—1R; quare cum sint proportionales, erit factum sub extremis 70—2R, æquale 5R: & ita ad æqualitatem peruenimus; aduertentes factum sub extremis æquari facto sub medijs. Neq; dissimili modo in alijs Problematibus procedendum erit. Methodus au-

tem,

tem, vt diximus, prompta, & expedita potiùs exercitatione, quàm præceptis comparatur.

Proponatur hoc aliud Problema.

Exemplum quartum. *Quatuor numeros reperire ea lege; vt primus cum secundo, & tertio faciat 45; secundus cum tertio, & quarto efficiat 65; tertius cum quarto, & primo faciant 60; quartus autem cum primo, & secundo efficiant 55.*

Quatuor numeri simul sint 1R: ex hac autem subtractis prioribus tribus, qui dicebantur conficere 45, erit ob id quartus 1R—45; quamobrem primus erit 1R—65; proinde secundus erit 1R—60; atq; demum tertius erit 1R—55: hi autem omnes deberent efficere 1R; sed conficiunt 4R—225: proinde erit æquatio inter 1R, & 4R—225. Vide igitur qua arte ad æqualitatem perueniatur.

Rursus propositum sit Problema.

Exemplum quintum. *Datum numerum in duos cubos partiri, quorum laterum summa data sit.*

Hoc Problema determinationem habet, quam hic silentio prætereo; siquidem illud affero tantùm ad æquationem explicandam.

Datus sit numerus 224, diuidendus vt Problema requirit, nempe in duos cubos, quorum latera faciant 8; prioris cubi latus esto 1R ✠ 4, hoc est plus dimidio summæ laterum; relinquitur proinde alterius cubi latus 4—1R. cubi verò ipsi erunt simul 24Q ✠ 128, & hi erunt æquales dato numero 224.

1C ✠ 12Q ✠ 48R ✠ 64
64 ✠ 12Q — 48R — 1C
24Q ✠ 128 ☰ 224

Exemplum sextum. *Dato aggregato trium numerorum proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, distinguere singulos.*

Datus sit numerus 26, summa omnium. Sit autem 328, aggregatum quadratorum ab extremis. Medius ex tribus quæsitis numeris esto 1R: ergo summa extremorum erit 26—1R. Huius autem quadratum est 676—52R ✠ 1Q

con-

continetq; quadratum extremorũ, plus duplo medij quadrato, vt alibi demõstrauim⁹. Inde igitur ablato duplo quadrato medij nimirum 2Q, restabit aggregatum quadratorum ab extremis 675—52R—1Q, æquale 328.

$$\begin{array}{r} 26 + 1R \\ 26 - 1R \\ \hline -26R + 1Q \\ 676 - 26R \\ \hline 676 - 52R + 1Q \\ 2Q \\ \hline 676 - 52R - 1Q = 328 \end{array}$$

Numerum inuenire, cuius quadratus multiplicatus in datum numerum, procreet numerum, à quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunq; numerus datus. Exemplum septimum.

Sit numerus inueniẽdus, cuius quadratus multiplicatus in 5, faciat numerum, à quo si demantur 200, remaneat numerus 800. Quæsitus numerus esto 1R, qua ducta in se fit 1Q, hoc autem ducto in 5, fit numerus 5Q, à quo si subtrahantur 200, remanent 5Q—200, quæ debent æquari 800. Insuper propositum sit hoc aliud Problema.

Numerum inuenire, qui inter duos medius sit, isq; superet minorem dato numero, superetq; à maiori, numero dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunq;. Exemplum octauum.

Sit iniunctum reperire numerum medium inter duos summam efficientes 62; adeo vt hic superet minorẽ numerũ 12, & superetur à maiori numero 10. Cum igitur maior superet medium numero 10, & medius minorem numero 12, ergo maior superabit minorem numero 22. Oportet itaq; diuidere numerum 62, in duos numeros, quorum differentia sit 22: si namq; minori inuento addatur numerus 12, habebitur numerus medius quæsitus. Pars minor esto 1R, altera nempe maior, erit 62—1R, harum autem differentia est 62—2R, & æquabitur 22, & ita sumus æquationem consequuti.

Exemplum nonum. *Duos numeros reperire, quorum productum sit 20, & differentia quadratorum sit 96.*

Dico minorem ex numeris quæsitis esse 1R: cum igitur productus numerus debeat esse 20, erit alter $\frac{20}{1R}$. Nam producto sub duobus numeris diuiso per vnum ex illis duobus, exhibetur alter. Horum autem quadrata sunt 1Q, & $\frac{400}{1Q}$. Quoniam autem 1R, ponitur esse minor illorum numerorum; erit proinde 1Q, minus quadratum, quo subtracto de $\frac{400}{1Q}$, residuum erit $\frac{400}{1Q}$ — 1Q, & hæc erit differentia quadratorum; quamobrem erit æquatio inter 96, & $\frac{400}{1Q}$ — 1Q, & ita ad æquationem deuentum est.

Exemplum decimum. *Propositum numerum diuidere in duas partes, quorum quadrata datam habeant proportionem.*

Sit iniunctum diuidere 5, in duas partes, quorum quadrata habeant proportionem vt 2, ad 3. Minor numerus esto 1R, maior igitur erit 5 — 1R, horum autem quadrata sunt 1Q, & 25 + 1Q — 10R, proinde erit 1Q, ad 25 + 1Q — 10R, vt 2, ad 3, atq; adeo numerus productus sub extremis, æquabitur facto sub medijs, ob id 50 + 2Q — 20R = 3Q.

Afferemus autem vnum, vel alterum exemplum eorum ænigmatum, quæ sunt ad res materiales contracta, deinde alia ad res Geometricas, vt quisq; videat methodum procedendi ad æquationem inquirendam.

Exemplum decimum primum. *Tantam habeo pecuniam, vt si ad ipsam accederent $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & à summa detraheretur $\frac{1}{12}$, eiusdem pecuniæ quam habeo, tunc haberem aureos 120, quæritur quanta sit mea pecunia.*

Aureorum summa esto 1R, ad hanc si accedant $\frac{1}{2}$R, $\frac{1}{3}$R, $\frac{1}{4}$R, facientes 1 $\frac{1}{12}$R, fiet tota pecunia 2 $\frac{1}{12}$R, ablata verò vtrinq; $\frac{1}{12}$R, relinquentur 2R = 120, & ita ad æqualitatem deuentum erit.

Viator singulis diebus, 20 milliaria conficit, alius autem duodeci-

decimo post die elapso, idem iter aggreditur. Quaeritur quot milliaria debeat posterior conficere, vt priorem 20 diebus assequatur.

Exemplum decimum secundum.

Pono 1R, milliariorum: proinde in 20, diebus conficiet 20R, milliariorum; at verò prior singulis diebus conficiens 10, milliaria, absoluet in 20, diebus 200, milliaria; additis autem huic milliariorum numero 120, milliarijs, quæ iam ille 12, diebus confecerat, erit totus numerus milliariorum 320, quamobrem erit æquatio 20R = 320.

Aequationis indagatio.

Eiusdē inuentio.

Duæ sunt militum turmæ, quarum vna superat alteram 90, militibus; fit autem in vtraq; distributio nummorum aureorum 600, quilibet autem minoris turmæ accipit 6 aureos amplius, quàm quilibet maioris: quæritur quot sint milites in qualibet turma.

Exemplum decimum tertium.

Hoc nil aliud est, quàm diuidere 600, per duos numeros, quorum minor, a maiori excedatur numero 90, & sit quotus prioris diuisionis maior quoto posterioris numero 6.

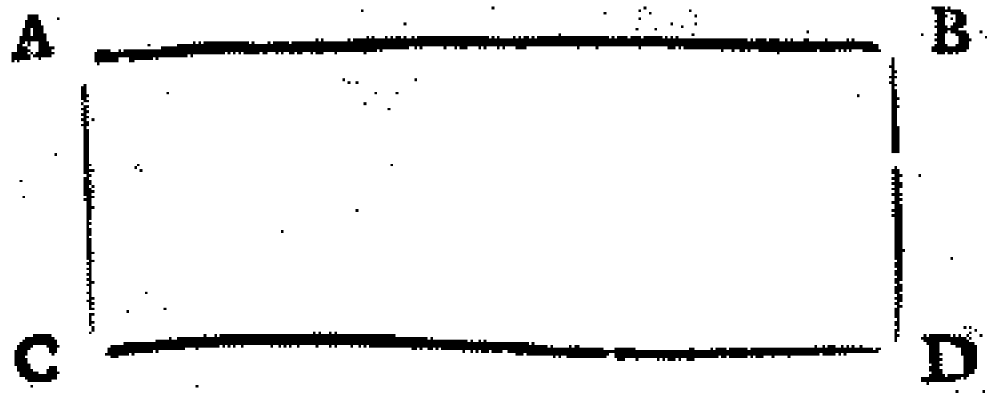
Minor diuisor esto 1R, maior igitur erit 1R + 90, per quos si diuidatur numerus 600, prouenient $\frac{600}{1R}$, & $\frac{600}{1R+90}$, quoniam autem prior quotus posteriorem superat numero 6, ob id posteriori debet addi 6, vt fiat $6+\frac{600}{1R+90}$, quamobrem erit æquatio huiusmodi $\frac{600}{1R} = 6+\frac{600}{1R+90}$.

Problemata ad res Geometricas pertinentia hæc sint.

Propositum sit rectangulum ABCD, cuius area sit 40, & proportio laterum sit, vt 5, ad 1, quærantur latera.

Exemplum decimum quartum.

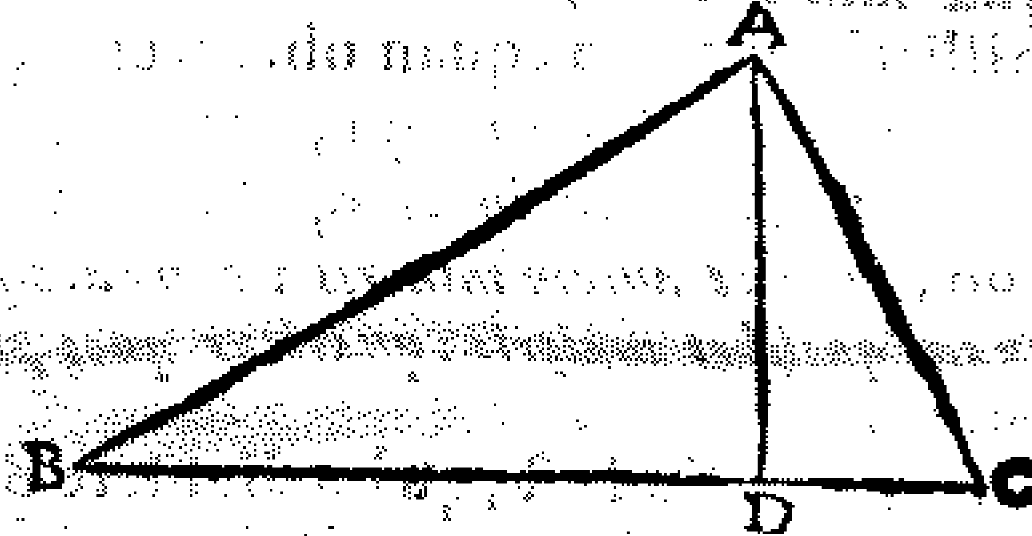
Aequationis indagatio.



Latus BD, minus scilicet, dico esse 1R, erit igitur CD, maius 5R, hoc enim modo prædicta latera seruant cōstitutam proportionem; quamobrem 1R, si ducatur in 5R, fient 5Q, *Eiusdem inuentio.* area eiusdem rectanguli, siquidem hæc habetur per multiplicationem vnius lateris in aliud, proinde fiet æquatio $5Q = 40$.

Exemplum decimum quintum. *Propositum sit triangulum ABC, cuius sit latus vnum BC, 46, aliud BA, 30, tertium deniq; AC, 20, quæritur autem in quales partes perpendicularis AD, diuidat BC, nimirum quanta sit BD, & quanta DC.*

Æquationis inuentio. Pono BD, esse 1R, ergo DC, erit 46—1R, quoniam autẽ (per 47. primi) quadratum lateris AB, æquale est quadratis ex BD, & DA, si à 900, quadrato ex 30, nempè



AB, subtraxero 1Q, nimirum quadratum ex BD, remanebit 900—1Q; si verò (ob eandem 47.) subtraxero 2116—92R + 1Q, quadratum ex DC, subtraxero inquam ex 400, quadrato ipsius AC, remanebit 92R—1716—1Q. At verò remanebat 900—1Q, pro quadrato perpendicularis AD, & remanet etiam 92R—1716—1Q, pro quadrato eiusdem. Ob id erit æquatio 900—1Q = 92R—1716—1Q; & hac arte licuit ad æqualitatem peruenire. Methodus autem perueniendi ad ipsam æquationem constabit magis ex analysi variorum Problematum, quã suo loco ad maiorem huius Artis illustrationem afferemus.

Monitum. Cæterum ne me carpas velim, benigne Lector, quod exemplorum loco Problemata veterum Analystarum attulerim, non autem ea si quæ sunt, quæ proprio Marte excogitauerim, quandoquidem ad explicationem doctrinæ parui refert, num ego vel alter ipsa Problemata reperierit; non enim hæc ad ostentationem ingenij, sed potiùs ad maiorem Artis explicationem afferimus. Multa verò Problemata posteriùs enodabimus, in quibus totius Artis processum conspicere licebit.

De

De Antithesi, seu Reductione, vel Transpositione Æquationis.

CAPVT IX.

Antithesis est numeri, seu quantitatis ex vna æquationis parte, in alteram partem, sub contraria nota affectionis transpositio. Itaut si quantitas aliqua afficiatur hoc signo +, per Antithesin euadat affecta hoc nota —, & è contra. *Antithesis quid sit.*

Per Antithesin autem, secundum quosdam, reducitur ex vna æquationis parte sola Potestas, seu Dignitas maior. Dicunt enim, cum in solutione alicuius Problematis ad æquationem deuentum fuerit; ita vt per numerum maioris characteris cossici reliquus numerus æquationis diuidi non possit: tunc æquationis reductio fieri debet priùs quàm diuisio instituatur. Tunc autem diuisionem fieri non posse dicunt, cum maior dignitas, vel character, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel & si solus ponitur, tamen in reliqua parte quoq; idem character reperitur. Vt si esset æquatio 6R — 10 ⚌ 50, deberet priùs reduci ad hanc 6R ⚌ 60, antequam institueretur diuisio per 6, numerum maioris characteris; quoniam non solùm 6R, constituunt alteram æquationis partem, sed 6R—10. Sic etiam si æquatio foret inter 6R, & 80—2R, non posset institui diuisio per 6, numerum huius characteris R: quoniam etiam si numerus hic 6R, solus occupet alteram partem æquationis; idem nihilominus character in altera æquationis parte reperitur. Ita quoq; si foret æquatio inter 6R + 15, & 95—2R, nulla posset fieri diuisio; quoniam in vtraq; parte ipsius æquationis reperitur idem character R, & numerus absolutus. In omnibus autem supradictis æquationibus 1R, valor est 10; si fiat reductio, vt dictum est, instituta diuisione, *Ad quid sit opus Antithesi.*

ne,

ne, elicietur 1R, pretium 10; vt quisq; poterit experiri. Ita etiam dicunt, vt sola maior dignitas ex vna æquationis parte existat, hanc æquationem 52R—1Q = 576, in qua 1R, pretium est 16, reducendam priùs esse ad hanc 52R = 1Q + 576, & demum ad 52R—576 = 1Q, seu 1Q = 52 R—576. Ita si esset æquatio inter 1Q—96, & 10R, in qua æquatione 1R, pretium est 16; ad hanc reducendam esse volunt 1Q = 10R + 96. Præterea si esset æquatio inter 166 + 24R, & 2Q—4R + 102: primò reducenda esset per restaurationem — 4 R, ad hanc æquationem, scilicet inter 166 + 28R, & 1Q + 102: secundò hæc per transpositionem huius + 102, hoc est per subtractionem ex vtraq; parte, ad hanc reducenda foret, videlicet inter 1Q, & 28R + 64, in qua æquatione itidem 1R, valor est 16. Itaq; illi qui putant collocandam esse potestatem solam ex vna ipsius æquationis parte, arbitrantur Parabolismum, siue diuisionem per numerum maioris potestatis fieri non posse, nisi hoc pacto reductio fiat: quemadmodum neq; ipsam diuisionem institui posse, quando in vtraq; æquationis parte eadem reperitur dignitas, siue potestas, vel numerus absolutus vtrobiq; inuenitur. Exempli gratia. Si esset æquatio 6R + 10 = 70 + 2R, vides in vtraq; æquationis parte reperiri R, & numerum absolutum; ob id priùs ad hanc æquationem 4 R = 60, deuenire oportet, quàm instituatur diuisio. Sic etiam de alijs æquationibus consimilibus, vt constare potest, ex superioribus exemplis.

Exempla.

Nos autem cum Vieta hac sola de causa putamus instituendam esse Antithesin: non quia ex vna æquationis parte sola maior dignitas esse debeat: sed quia dignitates debeant omnes ex vna parte existere: & insuper, quia eadem dignitas ex vtraq; parte esse non debet; sicuti neque numerus absolutus debet in vtraq; æquationis parte constitui.

Vieta ponit omnes dignitates ex vna æquationis parte.

Totum autem Antithesis artificium innititur illis communibus animi conceptibus. *Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia. Et si æqualibus æqualia*

Antithesis fundamentum quid.

ad-

addantur composita sunt æqualia. Hæc autem exemplis declarabimus.

Animaduertendum autem reductionis initium sumendum esse à signo —: à deffectu itaq; sumi debet initium, si nimirum defectus adsit. Deinde debet Analysta prosequi in reductione, videlicet reducendo signa +. Reductio signi — nuncupatur. Restauratio, & fit per additionem. Reductio signi + fit per subtractione, vt inferiùs cõstabit, Et vt paucis perstringam, numerus negatus, siue affectus signo —, vtriq; æquationis parti addendus est: & tunc instituenda reductio, id est numerus affirmatus, siue affectus signo + ex vna parte in alteram transponendus est: hoc est auferri debet ex vtraque parte.

Quid aduertendum circa Antithesin.

Reductio signi —, restauratio nũcupatur. Reductio signi +, fit subtractione, vt signi —, fit additione.

Hęc autem Restauratio, siue additio, & Transpositio, siue subductio, quantumuis rectè fiat per regulam additionis, & subtractionis: tota tamen Reductionis, & Antithesis ars, duobus præceptis continetur, vt infra dicam.

Antithesis artificium duobus præceptis continetur.

Sit æquatio huiusmodi $2Q + 36 + 12R = 116$; in qua æquatione $1R$ valor, est 4: hæc reuocabitur ad hanc $2Q + 12R = 80$, nempe.

Declaratur superior doctrina.

$$\begin{array}{r} 2Q + 36 + 12R = 116 \\ + 36 \qquad\qquad + 36 \\ \hline 2Q + 12R = 80 \end{array}$$

Detracto numero 36, vtrinque, siquis vellet solam ex vna parte æquationis maiorem dignitatem; ita se haberet æquatio, $2Q = 80 - 12R$. Hoc magis constabit si resoluatur æquatio in numeros absolutos, erit enim huiusmodi.

$$32 + 36 + 48 = 116$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ \hline 116 \end{array}$$

Reductionis ratio. Si 1 R, pretium sit 4; modò reducta erit 32 + 48 = 80. Ratio autem superiùs insinuata est: cum enim æqualitas sit inter 2 Q + 36 + 12 R, & 116, necesse est, si idem vtrinq; auferatur, nimirum numerus 36, remanere æqualitatem inter residua. Deinde proposita æquatio hæc 256 + 2 Q — 32 R = 160, reuocabitur primò ad hanc 256 + 2 Q = 160 + 32 R nempe additione numeri — 32 R, vtrobiq; facta; deinde verò vtrinque auferendo 160, remanebit æquatio huiusmodi 96 + 2 Q = 32 R: mox verò si vtrinq; auferantur 2 Q, fiet æquatio 32 R — 2 Q = 96. Quod si numerus maioris dignitatis ex vna æquationis parte solus deberet remanere; fieret æquatio talis 2 Q = 32 R — 96. Precium 1 R, est 4, vel 12, vterq; numerus satisfacit. Itaq; resoluta æquatione 256 + 2 Q — 32 R = 160 in numeros absolutos erit æquatio 256 + 32 — 128 = 160: quæ reuocabitur primò ad hanc 256 + 32 = 160 + 128, nempè additione 128, ex vtraq; parte; & vtrinq; ablatis 160, remanebit æquatio 96 + 32 = 128.

Præceptum. In huiusmodi autẽ operatione cernere licet, quod communiter dici solet, *Quicquid trãsponitur mutat signum*: nempe quod illa particula æquationis, quæ gerit signum +, transposita in alteram æquationis partem, acquirit signum —; hoc est subtrahitur ab altera æquationis parte: & illa, quæ habet signũ — si transponatur, acquirit contrariã affectionis notã, nempe +, nimirũ additur alteri æquationis parti.

Idem præceptũ alijs verbis conceptum. Insuper, *Eadem signa subtrahunt, Diuersa verò addunt*; seu, vt alij loquuntur, *Homogenea signa negant, Heterogenea affirmant*. Huius autem præcepti sensus est iste, videlicet.

Si

Si aliqua æquationis particula transponenda, gerens alterum ex duobus signis ✠, & —, in altera æquationis parte habuerit numerum maiorem, denominationis eiusdem cum eodem signo; fieri debet numerorum subtractio, & idem relinquendum signum ✠ vel — ipsi residuo. Vt superiùs, quoniam tàm numerus 160, quam 256, habet signum ✠; ideo fieri debet numerorum subtractio, & residuo 96, præponendum idem signum. Quod si esset æquatio cum signo — ex vtraq; parte, & afficeret numeros eiusdem denominationis, idem agendum esset. Vt si sit ęquatio ista, in qua 1 R, valor est 6; sit inquam æquatio huiusmodi 9 R — 15 ═ 15 R — 51; quoniam tàm 15, quàm 51, idem habent signum — proinde, vt transponantur 15, debent auferri à 51, & idem relinquendum signū —, itaut remaneat æquatio 9 R ═ 15 R — 36: modò quia tam 9 R, quam 15 R, idem habent signum ✠, proinde auferantur 9 R, abs 15 R, & remanebit æquatio 0 R ═ 6 R — 36; nunc vtrinq; addantur 36, fiet ęquatio huiusmodi 6 R ═ 36: & ita in reliquis casibus procedendum erit. Sit rursus æquatio 54 ✠ 4 R ═ 1 Q — 6 R ✠ 30. Quoniam ✠ 4 R, & — 6 R, diuersis signis afficiuntur; ob id adduntur 4 R, ad 6 R, vt fiant — 10 R; atque adeo fit æquatio 1 Q — 10 R ✠ 30 ═ 54. Quoniam autem 54, & 30, habent idem signum ✠, propterea debent subtrahi 30, à 54, vt remaneat ęquatio huiusmodi 1 Q — 10 R ═ 24. Hæc autem examinari possunt per radicis pretium, quod supponimus esse 12. Sit rursus ęquatio 1 Q ✠ 4 R ✠ 42 ═ 10 R ✠ 1 Q: vtrinq; auferatur 1 Q, remanebit æquatio hæc 4 R ✠ 42 ═ 10 R: rursus vtrinq; sublatis 4 R, & remanebit 6 R ═ 42.

Eiusdem praecepti sensus.

Quando est æquatio cū signo —.

Exempla ad superiorem doctrinam illustrandam.

Antithesis itaq; in eo tota posita est, quod superiùs innuimus, scilicet in transpositione particularum. Cęterum hęc duo præcepta excogitarunt Artifices pro huius operationis compendio. Ad hanc autem operationem ritè exercendam, Additionis, & subtractionis regulæ sufficere possunt.

In quo damum Antithesis consistat, explicatur.

Reductio æquationũ inter fractiones fit multiplicatione per crucem.

Superest vt hic verba faciamus de reductione æquationum inter fractiones, & inter nnmeros denominatos irrationales; & absolutos numeros. De hoc iterum verò sermo redibit Cap. de Parabolismo.

* Reductio æquationis inter minutias fit multiplicatione per crucem, & reducitur ad æquationem integrorum; vt si esset æquatio $\frac{6R + 24}{5} = \frac{72Q - 396R}{3R}$, multiplicentur in crucem, nempe 6 R + 24 in 3 R, & 72 Q — 396 R in 5, & fient producta 18 Q + 72 R = 360 Q — 1980 R; & per characterum abbreuiationem 18 R + 72 = 360 R — 1980; & per abbreuiationem numerorum 1 R + 4 = 20 R — 110: ac proinde 19 R = 114.

Numerorũ absolutorũ exemplo superior operatio illustratur.

Hęc autem operatio illustrior euadet, si reducantur omnes numeri in numeros absolutos. Quamobrem sit rursus ęquatio $\frac{840}{4R} = 12 + 6R$; facta multiplicatione per crucem, reducetur ad hanc 48 R + 24 Q = 840; & facta abbreuiatione numerorum, per diuisionem fiet 2 R + 1 Q = 35: huius autem æquationis Analysi instituta reperietur 1 R, valor 5; secundum quod quidem pretium resoluta ęquatione in numeros absolutos, comperiemus operationem rectè institutam fuisse. Sit rursus æquatio $\frac{3R + 200}{40} = 6$: per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc 3 R + 200 = 240: & resoluta æquatione per numeros absolutos, posito 1 R, pretio $13\frac{1}{3}$, operationem benè comperiemus institutam. Sit æquatio $\frac{5R + 60}{24} = 5$, reducetur ad hanc 5R + 60 = 120, & est 1 R, valor 12.

Si esset æquatio $\frac{122}{4R} = 6 + 3R$, fieri debet, vt supra multiplicatio, per crucem, vt eueniat æquatio huiusmodi 24 R + 12 Q = 122, & per diuisionem reducetur ad hanc 2 R + 1 Q = $10\frac{1}{6}$. Instituta autem analysi reperie-

tur

tur 1R valor hic ℞Q 11 $\frac{1}{6}$ — 1. Itaque resoluatur ęquatio secundum hoc valoris pretium, & 2 R, valebunt ℞Q44 $\frac{4}{6}$ — 2, atq; 1 Q. erit 12 $\frac{1}{6}$ — ℞Q 44 $\frac{4}{6}$. ic etiam 24 R, valebunt ℞Q6432 — 24, & 12Q, valebũt 146 — ℞Q 6432: horum summa est 122.

℞Q 11 $\frac{1}{6}$ — 1
℞Q 11 $\frac{1}{6}$ — 1

— ℞Q 11 $\frac{1}{6}$ + 1
11 $\frac{1}{6}$ — ℞Q 11 $\frac{1}{6}$

12 $\frac{1}{6}$ — ℞Q 44 $\frac{4}{6}$
℞Q 44 $\frac{4}{6}$ — 2

10 $\frac{1}{6}$ Summa.

Porrò si resoluatur fractio in numeros eosdem absolutos, comperiemus rectè nos operatos fuisse: per communem enim diuisionem non immutatur æqualitas. Si itaq; 24 R + 12 Q, diuidamus per 6 + 3 R, fiet quotiens 4 R, & si idem diuidatur per 4 R, fiet quotiens 6 + 3 R: si 122 diuidantur per 4 R, fit quotiens $\frac{122}{4R}$.

Numeris absolutis explicatur superior operatio.

10 $\frac{1}{6}$ Summa
146 — ℞Q 6432
℞Q 6432 — 24

122 Summa

$$\frac{122}{4R} \times \frac{6 + 3R}{1}$$

$$24R + 12Q = 122$$

Cum autem dictum sit 1 R, valorem esse ℞ Q 11 $\frac{1}{6}$ — 1, certè 3 R, valebunt ℞ 100 $\frac{1}{2}$ — 3, & 4 R valebunt ℞ 178 $\frac{2}{3}$ — 4: hæc autem residua inuicem multiplicata faciunt 146 — ℞ 6432. Si verò ℞ 178 $\frac{2}{3}$ — 4, pretiũ nempe quatuor radicum, multiplicetur per 6; fiet ℞ Q64 32 — 24 ideo produ-

℞Q 100 $\frac{1}{2}$ — 3
℞Q 178 $\frac{2}{3}$ — 4

— ℞Q 1608 + 12
134 — ℞Q 1608

146 — ℞Q 6432
℞Q 6432 — 24

122

citur tantùm 122, vt supra dictum est; Si autem multiplicetur 6 ✠ ℞ 100 ⁝ — 3 hoc est ℞ 100 ⁝ ✠ 3, per ℞ 178 ⁝ — 4 producitur 122. Hoc igitur diuiso per ℞ 178 ⁝ — 4,

℞Q178 — 4
6
―――――――――――
℞Q6432 — 24

fiet quotiens ℞ 100 ⁝ ✠ 3: hic respondet fractioni $\frac{6 \dagger 3R}{1}$, & fractioni $\frac{122}{4R}$, respondet etiam ℞ 100 ⁝ ✠ 3; ob id rectè dicebatur, &c.

Item si sit æquatio huiusmodi $\frac{24}{2R} = \frac{60}{1Q \dagger 2R}$, reuocabitur ad hanc 120R = 24Q ✠ 24R. Hæc autē $\frac{4R \dagger 16}{5} = \frac{48Q - 264R}{3R}$, ad hanc 12Q ✠ 48R = 240Q — 1320R. Præterea si esset æquatio inter $\frac{6R \dagger 10}{1R \dagger 5}$, & $\frac{12}{1Q}$, reducetur ad hanc inter 6C ✠ 10Q, & 12R ✠ 24. Si foret æquatio inter 2Q ✠ $\frac{10R}{3Q}$, & 10 ✠ $\frac{15}{4R}$, reducetur ad hanc $\frac{6QQ \dagger 10R}{3Q} = \frac{40R \dagger 15}{4R}$, deinde per multiplicationem in crucem, fiet reductio vt supra, &c. Itē hęc æquatio 1Q = $\frac{390R - 14Q}{25}$, reducetur ad hanc 25Q = 390R — 14Q. Si sit æquatio $\frac{1Q}{24} = 384$, reducetur ad hanc 1Q = 9216.

Declaratur superior doctrina de reductione.

Hoc totum explicari potest vna, vel altera æquatione resoluta in numeros absolutos. Vt si 1Q = $\frac{390R - 14Q}{2}$; est 1R, pretium 10, ergo 1Q, valor erit 100; cum autem 1R, pretium sit 10, ergo 390R, valebunt 3900, & 14Q, valebunt 1400 his detractis à 3900, cum ille numerator sit, residuum, erit numerus 2500, quo diuiso per 25, fit quotiens

tiens 100. Non immeritò igitur dicebamus, si 1Q, æquatur $\frac{390R-14Q}{25}$, etiam 25Q, æquari 390R—14Q: siquidem 25Q, valent 2500, tantus est autem valor istius residui 390R—14Q: Sic non dissimili modo hoc idem patebit in omni alio exemplo, quod in numeros absolutos non dissimili artificio resoluatur.

Declarantur superiùs dicta in minutijs vulgaribus &c.

30	10
2	6
60	60

Hoc declaratur in minutijs vulgaribus. Si etenim ponantur duæ minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$, quæ sunt æquales, vt patet, multiplicētur autem per crucē, producentur numeri æquales 60, 60.

Reductionis demonstratio.

Demonstratio verò ita se habet. Quoniam ipsæ minutiæ æquales ponuntur, eadem erit proportio numeratoris minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris minutiæ posterioris ad eiusdem denominatorem. Exempli gratia. Cum sint æquales minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$, quæ proportio est 10, ad 30, eadem erit 2, ad 6; quare numerus productus ex 30, in 2, æqualis erit producto ex 10, in 6: si itaq; numerator vnius ducatur in denominatorem alterius, & è contra numerator posterioris in denominatorem prioris, cum sit idem, ac ducere primum in quartum, & secundum in tertium ex quatuor numeris proportionalibus, producti numeri erunt inter se æquales.

Explicatur operatio in numeris surdis.

Quod attinet ad numeros surdos, quo pacto nimirum procedendum sit, patet ex superiùs explicatis. Sit æquatio ℞24R ⚌ 12: fiat æquatio quadratorum, nempe 24Q ⚌ 144. Itaq; diuisis 144, per 24, prodibit in quotiente numerus 6, scilicet vnius quadrati pretium. Itaq; ℞6, erit 1R, valor; & ita videtur esse; quandoquidem si supponamus 1R, valorem esse ℞6, certè ℞24R, valebit 12, propterea quod, si ducamus ℞6, in ℞24 fiet productum ℞144, hoc est 12. At verò si 1R, pretium foret 6, multiplicata ℞24, per 6, fiet productum ℞864: quamobrem esset æquatio ℞24R ⚌ ℞864; non autem ℞24R ⚌ 12.

Clauius aliter operatur, putat enim quadratum è ℞

24R,

Cap. 26. Algebra. 24 R, esse 24 R, & facit æquationem inter 24 R, 144; quamobrem diuisione instituta, dicit 1R, pretium esse 6. At verò Clauium esse deceptum ex eo colligitur, quia si proponeretur æquatio huiusmodi ℞ 25 R ⚌ 60; eadem esset, ac illa 5 R ⚌ 60. Itaq; quemadmodum horum extremorũ quadrata in ista sunt 25 Q, & 3600; ita etiã quadrata extremorum in illa, erunt 25 Q, & 3600: sed instituta diuisione prosilit quotiens 144, scilicet 1 Q, pretium, cuius ℞ est 12, & est 1R, valor.

℞	2	4
℞		6
1	4	4
•		•
1		2

At verò iuxta Clauium foret æquatio 25R ⚌ 3600, diuisioneq; instituta fieret 1 R, pretium 144: rem autem sic se se habere confirmat, quia si ducamus 144, in 25, fit productum 3600, cuius ℞ est 60. Sed non benè videtur ipse ratiocinatus; etenim si 1R, pretium est 144, certè ℞ 25R, nempè 5R, non erit 60, sed numerus productus ex ℞ 25, in 144, nempè ℞ 518400, hoc est 720. Petendum autem à Clauio, cur postquam multiplicauit 144, per 25 extrahit ℞, ex numero producto 3600, non aliam equidem ob caussam, nisi quia, adhibuit 25R, non secus, ac si quadrata essent. Hoc autem est confundere R, cum Q. Meliùs igitur erit operationem exercere, vt supra dicebamus. Idq; declaratur magis, nam si ferет æquatio ℞ 16Q ⚌ 20, cum 16Q, habeat latus, nempe 4R, erit æquatio inter 4R, & 20: & ita est, quandoquidem si 1R, pretium fuerit 5, vtiq; 4R, valor erit 20, & 16Q, nimirum, quadrati ipsarum 4R, valor erit 400; quamobrem non erit huiusmodi quadratum, scilicet ipsius ℞ 16R, non erit inquam 16R, adeo vt æquatio sit 16R ⚌ 400, sed potius 16Q. Ita quoq; supponamus 1R, pretium esse 6, & sit æquatio ℞ 24 R ⚌ ℞ 864, erit etiam æquatio 24 Q ⚌ 864; diuisis autem 864, per 24, fit quotiens 36, nimirum 1Q, pretium, & latus eius, nempe 6, erit 1R, valor.

Cæterum animaduertendum est, quando scribitur ℞ 24R, posse esse sensum, quod latus, seu radix erui debet,

nedum

nedum ex numero, verum etiam ex potestate, quo pacto si supponatur 1R, pretium esse 6, erit ℞24R, idem quod 12: sed non benè hoc modo scribitur; etenim intra parenthesin scribi deberet sic ℞(24R) & foret æquatio huiusmodi ℞(24R) = 12. Quando verò scribitur ℞24R, sensus est, quòd numerus, cum non habeat radicem quadratam, ideo ei præpositum fuit signum radicale, & ex dignitate acceptum fuit latus.

Cæterum hæc æquationis pars, quam Antithesin appellari dicebamus, dicitur Reductio, & insuper Transpositio; nàm licet hoc verbum Antithesis propriè significet oppositionem, seu contrapositionem; nihilominus, quoniam per reductionem, de qua loquimur, terminum existentem ex vna parte in alteram transponimus, qua ratione transpositio dicitur, contrariaq; nota affectus euadit: proinde ratione huius oppositionis, seu contrapositionis, reductio æquationis appellatur Antithesis, quam dicebamus esse transpositionem quantitatis ex vna æquationis parte in alteram partem sub contraria affectionis nota.

Antithesis declaratur.

Cur hæc operatio dicatur antithesis.

Quando autem occurrit æquatio eiusmodi, vt in ipsa nullus extet absolutus numerus; tunc fieri debet Hypobibasmus, *Quæ nihil est aliud, quàm æqua depressio potestatis, & eius parodicorum graduum.* Hoc autem verbum propriè repressionem, subductionemque significat.

Hypobibasmus quid.

Hypobibasmus autem fit hac arte, nimirum subducendo depressiorem gradum parodicum tùm à potestate, tùm ab alijs gradibus parodicis. Itaq; si proponatur æquatio 12Q = 48R, reuocari debet ad hanc 12R = 48, nempè subducendo R, abs Q. Præterea si fuerit æquatio huiusmodi 6C = 30Q, reducetur ad hãc 6R = 30. Ex & si esset 1C = 20R, ad hanc reuocabitur 1Q = 20. Insuper hęc æquatio 1C + 3Q = 6R, ad hanc reuocabitur 1Q + 3R = 6: huius æquationis autem radix est ℞ 8 1/4 — 1 1/2. Prçterea 20QQ + 10C = 100Q, ad hanc reducetur 20Q + 10R = 100: huius æquationis ℞ est 2. Item 30QQ — 25C = 70Q, reuocabitur ad hanc 30Q — 25R = 70: huius

Qua methodo absoluatur hæc operatio, quæ hypobibasmus.

Exemplis declaratur superior doctrina.

huius ℞ est 2, & ita de reliquis.

Placet autem ad hanc operationem magis illustrādam, resoluere vnam, vel alteram æquationem in numeros absolutos, vt constet operationem hanc eo modo instituendam esse, quo explicuimus.

Ad maiorē istius operationis illustrationē, aliquæ resoluuntur æquationes. Exemplū.

Sit æquatio 6 C = 30 R: sit 1 R, pretium 5, ergo 6 C, valebunt 750, & 30Q, valebunt 750. Si reducatur per Hypobibasmum ad hanc 6 R = 30; optimè facta est reductio: quandoquidem cum 1 R, valor sit 5, vtiq; 6 R, valebunt 30.

30
25
———
150
60
———
750

Exemplū.

Sit æquatio huiusmodi 3 C + 4 Q = 95 R, per Hypobibasmum reducetur ad hanc 3Q + 4R = 95. Huius autem æquationis radix est 5; proinde 3C, valebunt 375: & 4Q, cum valeant 100, erit 3C + 4Q, alterius partis in æquatione pretium 475. At verò 95R, valebunt quoq; 475, si 1R, valor est 5. Cum autem reducta sit ad hanc 3Q + 4R = 95, benè facta est reductio; siquidem 3Q, valent 75, & 4Q, valent 20, proinde 75, cum 20, quoniam efficiunt vnam æquationis partem, nempè 3Q + 4R, benè dictum est æquari hanc partem alteri, in qua quidem sunt 95; quandoquidem 75, cum 20, faciunt 95.

De Parabolismo, seu Diuisione.

CAPVT X.

Facta reductione, debet institui parabolismus, siue applicatio, seu diuisio. Animaduersio.

Facta reductione, cum opus fuerit in æquatione proposita, statim instituenda est diuisio per numerum maioris dignitatis, seu potestatis: per hunc enim debet Analysta particulas omnes æquationis diuidere. Aduertēdo tamen in huiusmodi operatione, abijciendum characterem ipsum, & instituendam diuisionem per numerum, non secus, ac si non haberet sibi characterem annexum,

xum. Exemplis omnia declarabimus. Interim certum esse debet, *Parabolismum nil aliud esse, quàm homogeneorum applicationem ad quantitatem, in quam potestas ducitur.* Si sit æquatio $5R = 50$; debet institui diuisio per numerum 5, per quem diuisis 50, emerget quotiens 10, & 1 R, pretium. Item $4Q = 100$, fit quotiens 25, & 1 Q, pretium; itaq; 1 R, valor erit 5. Insuper $4C = 108$; diuisione instituta fit quotiens 27, & 1C, pretium: itaut 1R, valor sit 3.

Parabolismus quid.

Constat autem hanc operationem esse compendium regulæ aureæ. Siquidem dum habemus $4Q = 100$, & instituimus diuisionem; nil aliud efficere profectò curamus, quàm reperire pretium 1Q, dum constat 4Q, valorem esse 100: quasi diceremus, si 4Q, dant 100, quid dabit 1Q. Et ita de reliquis intelligendum est.

Parabolismus est cōpēdium regulæ aureæ.

Insuper si proposita sit æquatio $2Q = 20R - 12$, seu $20R - 2Q = 12$; per diuisionem reducetur ad hanc $10R - 1Q = 6$. Præterea si sit æquatio $10 + 60R = 400$; diuisis omnibus per 10, fit equatio $1Q + 6R = 40$.

Explicatur magis superior doctrina.

Innititur autem hæc operatio communi illo pronunciato, *Si æqualia per æqualia diuidantur, quæ fiunt sunt æqualia.*

Parabolismi fundamentum.

Cum ergo posita esset æquatio $1Q + 60R = 400$ nihil aliud diuisione inquirimus, quàm 1Q, pretium; etenim nobis constabit 10Q, valorem esse $400 - 60R$: proinde compendio quodam ita ratiotinati sumus; si 10Q, dant $400 - 60R$, quid dabit 1Q? & reperiemus dare $40 - 6R$. In forma verò ipsius regulæ aureæ stabit hoc modo.

Quid per diuisionem inquiratur.

20Q	$400 - 60R$	1Q?	$40 - 6R$

Etenim si $400 - 60R$, ducamus in 1Q, fiunt $400Q - 60C$; qui si diuidantur per 10Q, fit quotiens $40 - 6R$. Eodem modo intellige in cæteris æquationibus. Breuitatis autem causa ommittitur, tota illa regulæ aureæ operatio, & diuisio per numerum maioris characteris instituitur, cum in idem recidat.

Hoc autem fieri debet, vt supra innuimus, abiecto cha-

Cum diui-sor est vni-tas non est opus diui-sione; & quare.

ractere ipso, atq; per ipsum numerum, ac si characterem non haberet. Cæterum cum diuisor fuerit vnitas à maiori charactere denominata, non est opus diuisione, cum ex ipsa nihil noui emergat.

Declaratio supradictorum.

Hæc omnia facilè possunt explicari per resolutionem æquationum, ad numeros absolutos, & simplices. Vt si esset æquatio illa $10Q + 60R = 400$; cum $1R$, valor sit 4, certè $10Q$, valebunt 160, & $60R$, valebunt 240. Itaq; huius numeri compositi $10Q + 60R$, valor est 400. Dum autem omnia diuiduntur per 10, fit quotiens $1Q + 6R = 40$: & quidem optimè se habet æquatio; nam per communem diuisorem non immutatur æqualitas; dumq; diuiduntur pretia illorum numerorum denominatorum, scilicet dum diuiduntur numeri absoluti, euenit æqualitas. Nam si 400, pretium illius compositi $10Q + 60R$, diuiduntur per 10, fit quotiens 40. & si 400, numerus absolutus ex altera æquationis parte, & cui illi, tanquam homogeneo comparationis comparantur; si inquam 400, diuidatur per 10, fit itidem 40, vt patet: & ita de reliquis.

Non rarò contingit, vt oporteat reducere fractiones. Isomœria quid sit.

Verùm quia sæpè sæpius oportet fractiones reducere ad integros numeros, vt fiat legitima æquatio, facto Parabolismo; proinde de hac reductione aliqua dicenda occurrunt. Reductio autem hæc Isomœria nuncupatur; *Est enim hæc nihil aliud, quàm fractionum reductio, ad integros numeros, vt videbimus.*

Methodus, qua hæc operatio absoluitur. Exemplum 1.

Breuiter hæc potest obseruari methodus. Proposita sit æquatio $4QQ + 3C + 3Q + 2R = 1272$: si fiat Parabolismus per 4, numerum maioris dignitatis, reuocabitur ad hanc $1QQ + \frac{3C}{4} + \frac{3Q}{4} + \frac{2R}{4} = \frac{1272}{4}$.

Huius operationis regula declaratur.

Verùm vt ad integros numeros æquationem reuocemus, oportet aduertere distantiam dignitatum ab inuicem. Et primò obseruo dignitatem C, distare abs QQ, per R: ideo ducatur 3, numerator in 4QQ, per quem factus est Parabolismus, & fiunt 12, quibus diuisis per 4, denominatorem fractionis, fit quotiens 3: ergo in æquatione ponemus

1Q

1QQ + 3C. Deinde quia Q, abs QQ, distat per Q; ideo quadratè in se ducatur idem numerus 4, numerus inquam quadrato quadratorum, & fit numerus 16, in quem ducantur 3, & productus numerus 48, diuidatur per 4, denominatorem, & fit quotiens 12 Q: itaq; scribere debemus 1QQ + 3C + 12Q. Postea quoniam R, distat abs QQ, per C; proinde cubicè multiplicetur numerus 4, & producetur numerus 64, qui quidem ducatur in 2, numeratorem fractionis, & fit numerus 128; hic diuidatur per 4, fit quotiens 32, & ita habebimus 32R: itaut sit opus ad 1QQ + 3C + 12Q, addere numerum 32R, vt fiat summa 1QQ + 3C + 12Q + 32R. Demum, quia numerus absolutus distat abs QQ, per QQ; proinde numerus 4, debet quadrato-quadraticè multiplicari, vt fiat numerus 256, per quem multiplicari debet 1272, numerus absolutus, & fiet 325632; hic diuidatur per 4, & fiet quotiens 81408; erit ergo per Isomœriam inuenta æquatio ista 1QQ + 3C + 12Q + 32R = 81408.

Aduertendum autem 1R, pretium haberi, diuidendo per numerum QQ, hoc est per numerum quadrato-quadratorum, nempe per 4: diuidendo inquam numerum, qui extractione lateris ex æquatione pro 1R, pretio emergit.

Admonitio maximè necessaria.

Hæc autem declarari possunt tali pacto. Supponamus 1R, pretium esse 4; eius QQ, erit 256; quamobrem 4QQ, erunt 1024; deinde 3C, erunt 192; & 3Q, erunt 48; ac demum 2R, erunt 8; quorum summa est 1272: itaq; est æquatio, vt supra 4QQ + 3C + 3Q + 2R = 1272.

Declaratio supradictorum.

1024
192
48
8
1272

Benè verò fieri Isomœriam, quemadmodum docuimus, declaratur hoc modo. Si 1R, pretium est 4, ergo latus æquationis erit 16, nempe numerus productus ex 4, vnius radicis pretio in 4, numerum quadrato-quadratorum. Modò QQ, numeri 16, est 65536; & 3C, si resoluantur, faciunt numerum 12288;

Declaratur rectè quidē Isomœriā institui modo iam explicato.

65536
12288
3072
512
81408

& 12 Q, faciunt 3072: demum 32 R, faciunt 512; quorum summa est 81408: benè ergo dicebamus, æquationem illam reuocari ad hanc 1 QQ + 3 C + 12 Q + 32 R = 81408.

Exemplum 2. Sit æquatio 4 C + 6 Q + 10 R = 700: diuisione instituta, fiet æquatio $1C + \frac{6Q}{4} + \frac{10R}{4} = \frac{700}{4}$. Cum Q, distet à C, per R: proinde multiplicetur 6, numerator per 4, numerum cuborũ; & numerus productus 24, diuidatur per 4, denominatorem, fiet quotiens 6; & numerus quadratorum erit 6. Deinde quia R, distat à C, per R, multiplicetur 10, numerator per 16, quadratum numeri cuborum; & numerus productus 160, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; & quotiens 40, erit numerus radicum. Demum quoniam numerus absolutus distat à C, per C; proinde numerator 700, multiplicetur per 64, cubum numeri cuborum; & productus numerus 44800, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; nam quotiens 11200, erit numerus absolutus: itaut illa æquatio ad hanc sit reducta 1 C + 6 Q + 40 R = 11200. Hoc autem ita ostenditur. 1 R pretium supponebam esse 5: modo ducatur in 4, numerum elatioris potestatis, & fit 20: itaq; 20, erit huius æquationis latus (diximus enim numerum emergentem pro latere diuidendum esse, per numerum maioris potestatis.) Cubus ex 20, est 8000: addantur 6 Q, nempe 2400, & 40 R, nimirum 800; fit summa 11200, prout in æquatione dicebamus euenire.

Declaratur doctrina tradita.

Exemplum 3. Sit æquatio 5 QQ + 6 C + 3 Q + 7 R = 154: diuisione instituta, fiet $1\,QQ + \frac{6C}{5} + \frac{3Q}{5} + \frac{7R}{5} = \frac{154}{5}$; quæ quidem, per Isomœriam ad hanc reuocabitur 1 QQ + 6 C + 15 Q + 175 R = 19250. Supponebam enim 1 R, pretium esse 2: & quoniam numerus QQ, est 5, proinde duci debet in 5; atq; adeo huius æquationis latus erit 10, diuidendum per 5.

Exemplum 4. Sit æquatio 5 C + 17 R = 74: diuisione instituta, fit

fit $1C + \frac{17R}{5} = \frac{74}{5}$: per Isomœriam ad hanc reuocabitur $1C + 85R = 1850$. Etenim R, distat à C, per Q; proinde ducatur 17, numerator in 25, quadratum ex 5, numero cuborum; & productus numerus 425, diuidatur, per 5, denominatorem: fit quotiens 85, & numerus radicum. Deinde quoniam numerus absolutos distat per C; ducatur numerus 74, in 125, cubum ex 5; & productum 9250, si diuidatur per 5, fit quotiens 1850, & numerus absolutus: quod eodem pacto declarari potest, quemadmodum superiùs dicebamus. Etenim 1R, pretium supponimus esse 2: erit huius ęquationis $1C + 85R = 185$, latus, numerus 10; emergens scilicet ex ductu 2, in 5, numerum elatioris potestatis: proinde cubus erit 1000; ad quem si addantur 85 R, nimirum 850, fit summa 1850, veluti dictum est.

Sit æquatio $5Q + 12R = 185$: si instituatur diuisio, ad hanc reducetur $1Q + \frac{12R}{5} = \frac{185}{5}$: & per Isomœriam ad hanc $1Q + 12R = 925$, cuius latus est 25; quo diuiso per 5, numerum quadratorum fit quotiens 5, & 1 R valor. Exemplum 5.

Sit æquatio $10QQ - 4R = 230$. Si diuidantur omnia per 10, numerum quadratorum, fit æquatio $1Q - \frac{14R}{10} = \frac{230}{10}$: quæ per Isomœriam ad hanc reuocabitur $1Q - 4R = 2300$, cuius latus est 10; quo diuiso per 10, numerum quadratorum, fit quotiens, & 1 R, pretium 5: hoc est 1 R, pretium in æquatione illa superiori $10Q - 4R = 230$, erit 5. Exemplum 6.

Sit ęquatio $1C + \frac{2R}{3} = 25$: reducetur ad hanc $1C + 6R = 675$. Exemplum 7.

Item sit æquatio $1C + \frac{5R}{6} = 432$: reducetur ad hãc $1C + 30R = 93312$.

Est

Altera methodus perficiendæ Iſomœriæ.

Eſt etiam Iſomœriæ perficiendæ methodus altera. Reperiatur quiuis communis diuiduus numerus omnium denominatorum; & multiplicetur numerator cuiuſcunq; fractionis, per numerum, qui communem diuiduum metitur, per denominatorem numeratoris multiplicandi: integri autem numeri multiplicandi ſunt per communem diuiduum. Exempligratia, ſit æquatio huiuſmodi, $\frac{60}{2} + \frac{20}{5} = \frac{204}{6}$. Communis diuiduus eſto 30, ſvel alius numerus quicunq; quem poſſint omnes denominatores metiri. Numerus 2, metitur 30, per 15; proinde multiplicatis 60, per 15, producentur 900. Mox etiam videatur numerus, per quem numerus 5, metitur 30; & reperiemus 6: per hunc autem numerum multiplicentur 20, vt producantur 120. Deniq; 6, metiuntur 30, per 5; ob id multiplicatis 204, per 5, producentur 1020. Igitur æquatio illa ſuperiùs poſita per Iſomœriam reducetur ad hanc $900 + 120 = 1020$.

Exemplum 2.

Sit æquatio $1 R + \frac{2}{3} = \frac{17}{3} + \frac{5 R}{6}$. Communis diuiduus eſto 12, numerus, quem quidem 3, denominator fractionis $\frac{2}{3}$, metitur per 4; ducto autem 2, numeratore eiuſdem fractionis in 4, producitur numerus 8. Præterea multiplicatis 17, per 4, numerum per quem 3, denominator fractionis metitur 12; & fit, 68. At verò 6, denominator fractionis $\frac{5}{6}$ R, metitur 12, per 2: ducto autem 5, numeratore eiuſdem fractionis, in 2, producuntur 10. Itaque ſuperior æquatio, per Iſomœriam ad hanc reducetur. $12 R + 8 = 10 R + 68$, & eſt 1 R valor 30.

Exemplum 3.

Sit æquatio ſupra iam allata $5 Q + 12 R = 185$: per diuiſionem fit æquatio huiuſmodi $1 Q + \frac{12 R}{5} = \frac{185}{5}$. Communis diuiduus eſto numerus 10, quem denominator 5, metitur per 2; ducatur 1 Q, in 10, fiunt 10 Q: prꝫterea ducantur 12 R, in 2, numerum per quem denominator 5, metitur 10; & producentur 24 R: ducantur 185,

in 2,

in 2, & producentur 370: itaq; per Isomœriam reducta erit æquatio illa ad hanc $10 Q + 24 R = 370$; cuius radix est 5, quemadmodum, & illius $5 Q + 12 R = 185$, est etiam 1 R, valor 5.

Sit æquatio superius posita $4 C + 6 Q - 10 R = 700$: diuisione instituta, fiet æquatio hoc modo $1 C + \frac{6 Q}{4} + \frac{10 R}{4} = \frac{700}{4}$. Communis diuiduus esto numerus 8, quem denominator 4, metitur per 2: multiplicemus 1 C, per 8, & producentur 8 C: multiplicemus 6, numeratorem fractionis $\frac{6 Q}{4}$ per 2, & fiunt 12: multiplicemus 10 R, per 2, & fient 20 R: deniq; si multiplicentur 700, per 2, fient 1400: ob id per Isomœriam reducta erit æquatio illa, ad hanc $8 C + 12 Q + 20 R = 1400$. Huius autem æquationis radix est 5: nam 8 C, valent 1000; & 12 Q, valent 300, atq; demum 20 R, valent 100: horum summa est 1400. Exemplum 4.

Isomœria fit etiam multiplicando singulos numeratores per denominatores aliarum fractionum. *Isomœria fit etiam multiplicando singulos numeratores per denominatores.*

Sit æquatio $\frac{6 R + 20}{1 R} = \frac{8 R - 48}{4}$: reuocabitur ad hæc per Isomœriam, facta multiplicatione per crucem $24 R + 80 = 8 Q - 48 R$: est autem 1 R, pretium 10. Hoc autem quod diximus, resolutione in numeros absolutos facilè constabit: nam si 1 R, pretium est 10, ergo 6 R, valebunt 60; igitur illa fractio $\frac{6 R + 20}{1 R}$, erit 8; Insuper 8 R, valor erit 80; ob id illius fractionis $\frac{8 R - 48}{4}$, pretium erit 8. Exemplum 1.

Si sit æquatio $1 C + \frac{3}{2} Q = \frac{325}{?}$: per Isomœriam reducetur ad hanc $1 C + 3 Q = 1300$. Nam Q, distat à C, per R; ideo ducatur 3, numerator fractionis quadratorum in 2, numerum cuborum, per quem instituta fuit diuisio, & fit 6, quo diuiso per 2, denominatorem fractionis, fit Exemplum 2.

iterum

iterum 3, numerus quadratorum. Deinde quia numerus absolutus distat à C, per C; ob id cubicè multiplicetur numerus cuborum, per quem diuisio fuit instituta, & fiet 2600; quo diuiso per 2, denominatorem fractionis, fiet 1300; ob id erit $1C + 3Q = 1300$.

Exemplum 3.

Si daretur $1C + \frac{20Q}{5} = \frac{1800}{5}$, reduceretur ad hanc $1C + 20Q = 4500$. Huius æquationis radix est 30; quo numero diuiso per 5, denominatorem fractionis, fit radix alterius illius æquationis 5: & ita est, quemadmodum cuiq; perspicuum esse potest.

Explicantur magis, quæ hactenus dicta sunt.

Sed quæ hactenus diximus, vt magis explicemus, sumamus communem diuiduum, quem nimirum denominatores omnes fractionum diuidere possunt sine vlla fractione: modo multiplicetur per hunc numerum, numerus primi gradus, idest proximi infra potestatem; & per quadratum illius multiplicetur numerus sequentis gradus; per cubum eiusdem numerus tertij gradus; & ita deinceps, vsq; ad comparationis homogeneum: cum autem his multiplicationibus valor radicis propositæ æquationis augetur; proinde numerus inuentus pro radicis valore, nouæ scilicet æquationis, diuisus per illum inuentum numerum, dabit radicem quæsitam propositæ ab initio æquationis.

Exemplum ad idem.

Supponatur æquatio $1C + 5\frac{1}{2}Q - 12\frac{2}{3}R = 326$, cõmunis diuiduus erit 6, quem scilicet denominatores 2, & 3, diuidũt: modò fiant proportionales numeri; qui quidem subscribãtur partibus æquationis;

$$\begin{array}{cccc} 1C & +\,5\frac{1}{2}Q & -\,14\frac{2}{3}R & = 326 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ \hline & 33 & 528 & 70416 \end{array}$$

per quos, si superiores multiplicentur, fient 33, 528, 70416; atq; adeo fiet æquatio $1C + 33Q - 528R = 70416$. Huius autem æquationis radix est 36; qui quidem numerus diuisus per 6, communem diuiduum, dabit 6, pro radice illius æquationis.

De

De explicatione Æquationum Simplicium, siue Purarum.

CAPVT XI.

MEmoria debet Analysta complecti superius à nobis explicata, vt ad ea, quæ sequuntur progredi valeat. Dixímus autem simplices æquationes eas esse, in quibus vnus terminus vni termino æquatur. Cumq; longè faciliores hæ sint; operæ pretium erit ab his quidem exordiri.

Simplex æquatio q̃d sit in memoriam reuocatur.

Methodus explicandi æquationum inter R, & N.

QVando reperitur æquatio inter R, & N, hoc est inter Radicem, & Numerum absolutum, diuiso numero absoluto per numerum characteris R, & procreabitur in quotiente 1R, pretium quæsitum.

Quid agẽdum quando sit æquatio inter R, & N.

Sit æquatio 6R = 60. Diuiso numero 60, per 6, fit quotiens 10, & 1R, pretium. Itaq; sic proponetur resoluendum Problema.

Exemplũ.

Numerum reperire, qui si ducatur in 6, producat 60.

Problema.

Quæsitus numerus esto 1R, quæ si ducatur in 6, fiunt 6R, & erit æquatio, vt supra, & 1R, precium erit 10. Numerus enim hic satisfacit quæstioni, cum ductus in 6, producat 60.

Aduertendum autem diuisionem faciendam esse, non secus ac si forent numeri absoluti, nulla habita ratione characterum, vt videbimus infra.

Admonitio.

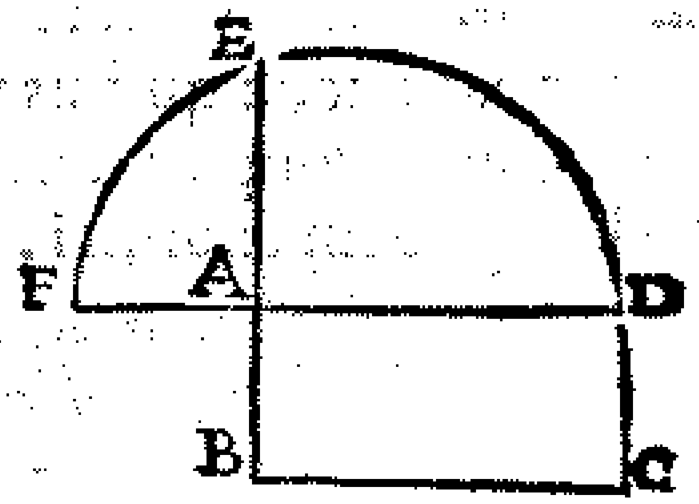
Demonstratio hæc est. Si sit æquatio inter numerum radicum, & N; id quod ignoratur est numerus, qui ductus in numerum radicum producit numerũ absolutum: quòd si

Demõstratio.

V diui-

diuidatur numerus absolutus per numerum R, quotiens erit numerus satisfaciens. Nam cum ea sit proportio diuisoris ad vnitatem, quæ diuisi ad quotientem, ideo æqualitas erit inter factum sub medijs, & sub extremis.

Geometricè sic. Radicum numerus sit A F: & planum comparationis homogeneum sit quadratum, cuius latus AE; quod fiat perpendiculare ad FA: quæ protrahatur ad partes A. Intelligatur recta ducta ab F, ad E, quæ bifariam secta sit: & à puncto sectionis, ducta sit recta ad rectos angulos, versus protractam FA; occurret illi, vt patet ex Elem. Hoc autem puncto occursus facto centro, ac interuallo vsq; ad F, describatur semicirculus; qui necessariò trãsibit per E, vt etiam



constat ex Elementis: secet autem in D, rectam FA, protractam: factumq; sit rectangulum AC; cuius latus AB, sit æquale ipsi FA. Erit rectangulum AC, seu FAD, æquale quadrato ex AE; ergo AD, erit lateris valor. Nam Radicis pretium est id, quod ductum in numerum radicum, facit productum æquale comparationis homogeneo: sed AD, huiusmodi est; nam ducta in AB, seu in AF, illi ęqualem, facit AC, quod est æquale quadrato ex AE, comparationis homogeneo; & eadem oritur ex applicatione quadrati rectæ AE, ad FA, radicum numerum, &c. Rectè igitur Regula iubet, vt fiat diuisio, eo modo, vt dictum est.

Methodus explicandi æquationem inter Q, & R.

Declaratur hæc methodus.

QVando reperitur æquatio inter Q, & R; diuiso numero radicum per numerum quadratorum, procreabitur in quotiente 1R valor.

Sit

Sit æquatio 6 Q ⊏⊐ 60 R: diuiso numero 60, per numerum 6, fit quotiens 10, & 1 R valor; sunt enim numeri denominati Collaterales, *Quorum exponentes vnitate se superant*. Itaque sic proponetur Problema. *Exempli.*

Numerum reperire, qui ductus in 60, producat numerum æqualem illi, qui fit, ducto quadrato numeri quæsiti in 6. *Problema ad hanc methodum illustrandam.*

Hæc autem æquatio reducitur per Hypobibasmum, ad æquationem inter R, & N: & eadem est demonstratio.

Methodus explicandi æquationem inter Q, & N.

QVando reperitur æquatio inter Q, & N: diuiso numero absoluto per numerum quadratorum, emergit in quotiente vnius quadrati valor. Ipsius igitur quadrati latus, 1 R pretium exhibebit. *Huius methodi præcepta.*

Sit æquatio 8 Q ⊏⊐ 128. Instituta diuisione, fiet quotiens 16, & 1 Q, pretium: cuius latus quadratum 4, vnius radicis valorem repræsentabit. Itaque sic proponetur Problema. *Numerum reperire, cuius quadratum ductum in 8, producat 128.* *Exempli.* *Problema.*

Demonstratur facilè, quandoquidem per diuisionem reuocatur æquatio ad æqualitatem, inter Q, & N, non enim communi diuisione immutatur æqualitas. Cum autem æquatio reducta fuerit inter Q, & N; patet latus quadratum numeri fore vnius radicis pretium: vt enim æqualia sunt quadrata, ita & latera. *Quadrata æqualia habent latera æqualia.*

Oportet autem ipsius puri quadrati analysin explicare, quod assequemur iuxta methodum Vietæam hic à nobis afferendam. *Methodus explicandi analysin puri quadrati.*

Primò quidem animaduertendum est potestatem puram in quocunq; gradu magnitudinum proportionaliter ascendentium, à tot singularibus lateribus componi, quot figuris numeralibus pro singularium valore distribuendis, & exprimendis, radix ipsa vniuersalis in genesi constat: *Explicatio methodi propositæ.*

siuè hæc pura potestas sit purum Quadratum, siuè purus Cubus, siuè purum Quadrato-quadratum, &c.

Quando Radix vna figura constat.

Quapropter si radix vnica tantùm figura constet, vt 5, ab eaq; sit propaganda potestas; ducta figura in se, vel in sui gradum, qualem potestatis genus exposcit, habetur ipsa potestas.

Quando duabus.

Quod si duabus figuris radix ipsa constet, vt 15; iam potestas creabitur ex 10, & 5, tanquam ex lateribus singularibus: ex 10, in 10, fit 100; ex 10, in 5, fit 50; rursus ex 10, in 5, fit 50; & ex 5, in 5, fit 25, horum summa 225: si loquamur de quadrato habetur potestas, vt patet. Si verò Cubus desideretur, tunc operatio iuxta istius gradus naturam perficienda est.

Quando tribus.

At verò si Radix tribus constaret figuris, vt 125; crearetur potestas abs 100, 20, & 5.

Quando quatuor.

Si radix quatuor figuris constaret, vt 1225; creabitur potestas, ab 1000, 200, 20, & 5. Sic etiam si pluribus figuris radix ipsa constaret: etiam potestas à pluribus singularibus lateribus; à tot scilicet, quot ipsamet radix vniuersalis constat, numeralibus figuris in genesi componitur.

Analysis potestatis, quid.

Potestatis itaq; resolutio, quam Græci Analysin appellãt, in tot singularia latera quidem distribuitur, quot radix vniuersalis figuris numeralibus in genesi constat: ipsaq; pro singularium valore distribuenda, & exprimenda.

Primũ obseruandũ ad analyseos institutionem.

Primum autem, obseruatione dignum videtur: vt extrema potestatis resoluendæ figura (quæ tamen prima est pergendo à dextra ad leuam) sedes constituatur vnitatum, quæ metiuntur potestatem lateris ex singularibus extremi, & minimi; punctoq; subtus notetur: est enim extremum latus à dextris, illudq; minimum.

Secundum.

At verò figura succedens pergendo à dextra ad læuam sedes est primi gradus ad potestatem ipsam parodici, &c. (dictum est autem superiùs, quid sit gradus parodicus ad potestatem;) notariq; debet congruenti nota, scilicet R: quandoquidem nos hanc notam adhibemus pro primo gradu parodico ad potestatem.

Nota primi gradus parodici ad potestatem est R.

Suc-

Succedens deinceps figura notari debet secundo gradu parodico, suaq; congruenti nota, qualis est Q: & ea quidem serie deinceps procedendũ erit in parodicis gradibus, notisq; congruẽtibus, donec ad potestatẽ ipsam perueniatur. *Tertium.*

At verò cum ad potestatem deuẽtum fuerit, rursus punctum est apponendum, symbolum vnitatum, quæ potestatem ipsam lateris penultimi metiuntur. Rursus post huiusmodi punctum progrediendum est in anteriora, suoq; sunt ordine collocandæ notæ, graduum videlicet parodicorum, atq; descripto iam à nobis modo, constanti quodam ordine procedendum est, donec ad lateris potestatem ex singularibus primi, maximiq; perueniatur. *Quartum.*

Quamobrem tot numeralibus figuris radix ipsa constabit, quot punctis singularium potestatum constat resoluendi numeri potestas: deinde procedendum iuxta leges analyseos, quæ nimirum illi congruit potestati. *Quintum*

Reperiatur latus primum singulare, ipsius singularis potestatis primæ; hoc autem ex singularibus lateribus maximum est. *Sextum.*

Deinde singularis primi lateris gradus parodici, secundum potestatis cõditionem multiplicari, & singuli sua collocari sede, subijciq; resoluendæ magnitudini debent: post quam ea prima singularis potestas adempta fuerit. Quod autem ex huiusmodi applicatione oritur, latus secundum statuendum est. Hæc autem applicatio non omnino est accurata: quandoquidem ad ipsum quoq; latus subaudiendum est fieri applicationem, ea tamen lege; vt homogenea, quæ fiunt ex singulari illo secundo latere, suisq; parodicis gradibus, in primum latus, primiq; lateris reciprocos gradus, resoluendæ magnitudini æquentur, vel ei demum cedant. Si verò æquent, opus iam solutum est: si verò cedant, & punctum aliquod supersit potestati addictum; duo iam elicita latera, vnius munere funguntur, scilicet maioris. Atq; non dissimili arte ad sequentis lateris inuentionem, & quidem minoris, procedendum est. *Septimum.* *Obseruandum.*

At verò si dum cedunt, non supersit aliquod punctum ipsi

ipsi addictum potestati; signum euidens latus irrationale esse. Tunc autem collecto lateri fragmentum adiungendum est, repertum quidem ea arte, quam Arithmetici, de Radicum extractione tractantes explicare solent.

Problema. *E dato in numeris quadrato puro latus analyticè elicere.*

Proposita sit æquatio 1 Q ⊏ 4096: & oporteat eam explicare, Radicis pretium exhibendo. Propositum itaq; quadratum resoluendum, à tot singularibus lateribus cõponitur, quot figuris radix vniuersalis quæsita, in genesi eiusdem quadrati constabat. Vt autem figurarum numerum ex quibus vniuersum latus constat assequi valeamus; propositi numero quadrati extrema figura, à sinistris ad dextram procedendo, puncto notari debet: & sic alternæ, in anteriora progrediendo, sunt notandæ, alternæ sunt omitendæ; cum vno scansili gradu ad hanc Potestatem, nempè quadratum perueniatur. Itaq; duo erunt puncta in suprapositio numero; si nimirum signatio, per puncta ad modum superiùs explicatum instituatur: quamobrem totum ipsum quadratum, tot singularibus quadratis; & totum latus, tot singularibus lateribus constare, pronunciandum erit.

Quando verò quadratum componitur à duobus singularibus lateribus; quadratum lateris primi, plus plano facto à duplo lateris primi in secundum, plus quadrato lateris secundi, æquale est composito quadrato.

Theorema Syntheticū.
Q, lateris primi,
+ plano facto à duplo lateris primi in secundum,
+ Q, lateris secundi; æquale est composito Quadrato.

Illud autem animaduertendum est, figuram primo puncto ad leuam signatam, non immeritò dici sedem vnitatum metientium quadratum primi lateris, eiusdemque maioris; succedentem autem sedem esse plani sub R; & deniq; extremam sedem esse vnitatum metientium quadratum secundi lateris.

Si verò plura superfuissent puncta; quadratum ab initio intelligitur componi tantùm à duobus illis lateribus, quæ quidem elicita iam funguntur vnius lateris munere; po-

stea

nea verò intelligeretur componi quadratum ipsum ex illo aggregato, tanquam ex primo latere, & ex sequente tanquam ex latere secundo.

Sit itaq; iniunctum, è dato numero quadrato 4096, analyticè elicere latus. Primi quadrati latus [illegible] ex 40: quamuis autem 40, non sit numerus quadratus, sed maior est 36, numero proximè quadrato minori; ob id dicetur latus primum esse 6: si tamen cætera consentiant, quod ex operis euentu cognoscetur. At verò 6, est latus primum vnica figura expressum: quam sequi tot numerales circulos subintelligendum est, quot supererunt puncta quadratica; nempe vnus in hoc numero. Modò ex 40, auferantur 36, remanebunt 4, vt fiat numerus residuus 496: qui quidem constat, tum ex plano sub 12, duplo lateris primi, & latere secundo indagando, tum etiam ex quadrato eiusdem lateris secundi.

Sumatur itaq; 12, duplum lateris primi quadrati; illudq; diuisor statuatur sub figura plani sub R: dum tamen ponas in anteriora dextrorsum, si qua duplicatio adiecerit. Si itaq; ad 12, applicemus 49, fiet quotiens 4, seu latitudo.

Illud hic obserua, si latitudinem non fecisset intra 10, fuisse inditium, primum elicitum latus 6, minus esse æquo; atq; adeo maius accipi debuisse.

Si verò ducantur 4, in 12, fiet 48, duplum planum sub primo, secundoq; lateribus. Quadratum autem à secundo latere 4, est 16, quod collocandum est, vt vides in adiuncto paradigmate, nempe sub puncto ei addicto. Quod si hoc quadratum sub sede quadrati secundi, & planum proximè descriptũ sub sede plani radicum, simul addantur; faciunt 496, numerũ æqualem residuo proposito quadrato: atq; adeo concludendum erit, quæsitum latus esse 64.

Quod si planorũ summa non fuisset æqualis residuo, sed eo minor; argumentũ esset, quod quadrati latus esset asymmetrũ: ob id non explicabitur, sed asymmetriæ notam adhibendo, absoluetur operatio. Vt si foret 1 Q ⊏ 5, dicemus

mus 1 R, valorem esse R 5: Radix autem proxima elicitur ad eum modum, quem Arithmetici tradunt.

Paradigma analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	4 0 . Q 1	9 6 R . Q12	Sedes singularium quadratorum, planorumq; sub lateribus.	o ● R 6 4 Q 36: 16	Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.
Planum ablatitium	3 6				
Reliquum resoluendi Quadrati.	4	9 6			

II. Eductio lateris singularis secundi

Reliquum resoluendi Quadrati.	4	9 6	
Diuisor duplum lateris primi.	1	2	
Plana ablatitia.	4	8	A latere secundo in duplum latus primum.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum equalis residuo resoluendo quadrato.	4	9 6	

Para-

Paradigma secundum analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	7 . Q I	6 1 R. Q II	7 6 R. Q III	Sedes singularium quadratorum, planorumque sub lateribus.	o o o R. 2 7 6 Q 729: 36	Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.
Planum ablatitium.	4			Quadratum lateris primi.		
Reliquum resoluendi Quadrati.	3	6 1	7 6			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi quadrati.	3	6 1	7 6	
Diuisor, duplum lateris primi.		4		
Plana ablatitia.	2	8 4 9		Ad latere secundo in duplum latus primum. Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	3	2 9		
Reliquum resoluendi quadrati.		3 2	7 6	

III. Eductio lateris singularis tertii.

Reliquum resoluendi quadrati.	3 2	7 6	
Diuisor duplum lateris primi.	5	4	
Plana ablatitia.	3 2	4 3 6	A latere secundo in duplum latus primum. Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum aequalis residuo resoluendo quadrato.	3 2	7 6	

Paradigma tertium analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	10	56	25	Sedes singularium quadratorum, planorumq; sub lateribus.	0 0 0 / Tot numerales circuli &c.
	Q I	R. Q II	R. Q III		R 3 2 5 / Q 1024 : 25
Planum ablatitium.	9				
Reliquum resoluendi quadrati.	1	56	25		

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Quadrati.	1	56	25	
Diuisor, duplum lateris primi.		6		
Plana ablatitia.	1	2		A latere secundo in duplum latus primum.
		4		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	1	24		
Reliquum resoluendi Quadrati.		32	25	

III. Eductio lateris singularis tertij.

Reliquum resoluendi quadrati.	32	25	
Diuisor duplum lateris primi.	6	4	
Plana ablatitia.	32	0	A latere secundo in duplum latus primum.
		25	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum aequalis residuo resoluendo quadrato.	32	25	

E da-

E dato in numeris Cubo puro, latus Analyticè elicere.

Si data sit æquatio 1 C ═ 592704, & oporteat eam explicare, pretium Radicis exhibendo. Hic numerus autem intelligitur componi à tot singularibus lateribus, quot figuris latus vniuersum, de quo quæritur, in genesi, seu effo rmatione cubi constabat.

Vt autem figurarum numerum assequamur, debent figuræ ipsius numeri punctis designari, itaut à læua ad dextram pergendo, extrema propositi numeri Cubi figura puncto signetur, reliquarum verò in anteriora pergendo, tertia quæque figura signari debet, hoc est duabus intermedijs relictis; quoniam duo sunt gradus scansiles, quibus ad cubum peruenitur, nempe R, Q. Cum itaq; duo sint puncta, pronunciandum erit totum cubum constare, tot singularibus cubis, atq; etiam latus tot nempe duobus singularibus lateribus. *Figuræ quomodo signari debeant.*

Quando autem componitur cubus à duobus lateribus singularibus, cubus lateris primi, plus solido à triplo lateris primi in quadratum secundi, plus solido à triplo quadrato lateris primi in secundum latus, plus cubo lateris secundi æquatur composito cubo.

C, lateris primi. *Theorem Syntheticũ.*
✠ solido à triplo lateris primi in Q, secundi.
✠ solido à triplo Q, lateris primi in secundum latus.
✠ C, lateris secundi, æquatur composito Cubo.

Prima, quæ ad læuam occurrit, puncto signata figura sedes erit vnitatum metientium Cubum lateris primi, & maioris.

At verò figura sequens sedes erit tripli solidi sub quadrato eiusdem. Figura autem succedens erit sedes tripli solidi sub ipso latere. Demum extrema figura sedes est vnitatum metientium cubum lateris secundi.

Si verò plura puncta superfuerint intelligetur cubus ab initio componi tantùm ab illis duobus lateribus, quę quidem cum elicita forent, vnius vice fungerentur; postea verò intelligeretur componi ex illo aggregato, tanquam primo *Quando plura fuerint puncta.*

mo latere, & sequente, vt secundo; & ita deinceps ordine costanti, ex adiuncto autem Paradigmate, omnia sine vlla alia explicatione comprehendere licebit.

Methodus. Primò igitur eliciatur latus cubicum ex numero, ad primum vsq; punctum ad læuam 592, cuius latus cubicum est 8. Dicimus itaq; 8, esse latus primum, si cætera consentiant, quod operis euentus indicabit, quemadmodum inferiùs constabit. Hoc autem primum latus vnica exprimitur figura, ad quam intelligendum est sequi tot numerales circulos, quot supererunt puncta cubica. Cubus autem ex 8, est 512, quo subtracto ex 592, remanet 80; adeo vt totus residuus numerus fiat 80704, constans solido sub lateris secundi quadrato, & triplo primi, plus solido sub triplo quadrati primi, & latere secundo inueniendo, plus cubo secundi.

Methodus indagandi secundam figuram. Hoc autem aduertendum, vt 192, triplum quadratum lateris primi collocetur sub sede gradui secundo addicta, hoc est proxima à puncto primi cubi, nempe sub 7. At verò 24, triplum latus primum collocari debet sub succedente gradui primo addicta, hoc est in apposito exemplo sub 0, succedente ad 7, hi verò numeri sic sunt constituendi tanquam diuisores in anteriora prorupturi vrgente necessitate.

Hic porrò numerus ritè dispositus 192, est ille, ad quem applicari debet numerus 807, vt fiat latitudo 4, pro secundo latere quæsito; ac proinde 4, erit secundum latus quæsitum, cæteris diuisoribus consentientibus, quod ex operis euentu dignoscere licebit. At verò si ex illa applicatione non prouenisset numerus intra 10, contentus, argumento fuisset latus illud primum 8, (hoc idem superiùs innuimus) minus æquo fuisse, atq; opus denuo inchoandum, atq; cubi proximè maioris latus eligendum, & ita deinceps. Si verò 4, ducantur in 192, fit 768, triplum solidum sub quadrato lateris primi, & secundo. At verò 16, quadratum è 4, si ducatur in 24, triplum lateris primi facit 384, triplum solidum sub quadrato lateris secundi, & primo. Deniq; 64, est cubus è 4.

Hi

Hi verò numeri hac lege disponuntur, vt 64, cubus lateris secundi, sub puncto e i addicto collocetur; solidum autem triplum sub quadrato lateris secundi, & latere primo, sub nota primi gradus, puta R; solidum deinde triplum sub latere secundo, & quadrato lateris primi, sub nota gradus secundi, nimirum Q, quoniam ad primum latus intelligitur comitari circulus numeralis. *Numerorū dispositio.*

Si summa solidorum non fuisset æqualis residuo, sed eo minor, argumentum esset cubi latere asymmetri; ob id non explicabitur, sed asymmetriæ notam exhibendo, v.g. si sit 1 C ═ 4, dicetur 1 R, valor ℞ C 4. *Quādo solidorū summa non est æqualis residuo.*

Quod si proxima radix quæratur, proxima inquam veræ, procedendum ad eum modum, quo suo loco Arithmetici docent, & nos alibi explicuimus. *Proxima radix quomodo inuenienda.*

Paradigma analyseos Cubi.

I. Eductio lateris singularis primi.

Cubus resoluendus.	592	704
	.	Q R
	C 1	C 11
Solidum ablatitium.	512	
Reliquum resoluendi Cubi.	80	704

Sedes singularium Cuborum, & solidorum sub gradibus.	o	o
	R 8	4
	Q 64	16
	C 512.	64

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Cubi.	80	704	
Diuisores: Triplum quadratum lateris primi.	19	2	
Diuisores: Triplum latus primum.		24	
Summa diuisorum	19	44	
Solida ablatitia.	76	8	Solidum à latere secundo in triplum Quadratum lateris primi.
	3	84	Solidum à quadrato lateris secundi in triplū latus primum.
		64	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum solidorum æqualis residuo resoluendo Cubo.	80	704	

Paradigma aliud analyseos Cubi.

I. Eductio lateris singularis primi.

Cubus resoluendus.	1	906	624
	.	.	Q R.
	C 1	C 12	C 124
Solidum ablatitium.	1		
Reliquum resoluendi Cubi.		906	624

Sedes singularium Cuborum, & solidorum sub gradibus.

0	0	0
R 1	2	4
Q 1	44	16
C 1728		64

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Cubi.	906	624	
Diuisores { Triplum quadratum lateris primi.	3		
Diuisores { Triplum latus primum.	3		
Summa diuisorum	33		
Sola ablatitia.	6		Solidum à latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
	12		Solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
	8		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum solidorum.	728		
Reliquum resoluendi Cubi.	178	624	

III. Eductio Lateris singularis tertij.

Reliquum resoluendi Cubi.	178	624	
Diuisores { Triplum lateris primi.	43	2	
Diuisores { Triplum latus primum.		36	
Summa diuisorum.	43	56	
Solida ablatitia.	172	8	Solidum à latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
	5	76	Solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		64	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum equalis residuo.	178	624	

Edati

E dato in numeris Quadrato-quadrato puro, latus analyticè elicere.

Extractio radicis ex æquatione in qua 1QQ = N.

Sit proposita æquatio huiusmodi 1QQ = 456976, & oporteat inuenire, quanta sit R, propositi Quadrato-quadrati. Id autem vt assequamur, oportet aduertere Quadrato-quadratum intelligi componi à tot singularibus lateribus, quot figuris latus quæsitum constabat in genesi, siue efformatione ipsius Quadrato-quadrati. Vt autem, figuratum numerum præfinire possimus, à dextra quidem ad læuam procedendo figuram extremam puncto notare debemus; reliquarum autem in anteriora progrediendo, quartas quasque figuras, tribus nimirum intermedijs prætermissis; eam scilicet ob causam, quia ad Quadrato-quadratum tribus scansilibus gradibus peruenitur, nempè R, Q, C.

Si duo puncta extiterint.

Si itaq; duo extiterint puncta, tot etiam Quadrato-quadratum vniuersale, singularibus Quadrato-quadratis constare pronunciandum est; atq; adeo, & latus etiam ipsum vniuersale, tot singularibus lateribus.

Quando verò Quadrato quadratum componitur à duobus singularibus lateribus, tunc

Theorema Syntheticũ.

QQ lateris primi.
+ latere secundo in C, quadruplum lateris primi.
+ lateris secundi Q, in sexcuplum quadrati lateris primi.
+ lateris secundi C, in latus quadruplum primi.
+ lateris secundi QQ, æquale est Quadrato quadrato aggregati laterum.

Animaduersio.

Insuper illud etiam animaduertendum, figuram signatam puncto primùm ad læuam occurrente, dici sedem vnitatum metientium quadrato-quadratum lateris primi, & maioris: figuram autem sequentem, sedem planoplani sub cubo eiusdem lateris primi quadruplando: succedentem, sedem planoplani, sub quadrato eiusdem lateris primi sextuplando: rursus succedentem, sedem esse planoplani sub ipso primo latere quadruplando: demum extremam sedem esse vnitatum metientium Quadrato-quadratum lateris secundi.

Ita

Ita quoq; si plura puncta extarent. Siquidem QQ, intelligeretur ab initio componi tantùm à duobus illis lateribus, quæ dum elicita essent, vnius quidem vice fungerentur; postea verò intelligeretur componi ex aggregato illo, veluti ex latere primo, & ex sequente, tanquam ex secundo, &c. *Cum plura puncta extiterint,*

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadrato-quadratum resoluendum.	4 5	6 9 7 6	Sedes singularium Quadrata quadratorum, & planoplanorum sub gradibus.	o — o R 2 : 6 Q 4 : 3 6 C 8 : 2 1 6 QQ 16 : 1 2 9 6	Tot numerales circuli, quot puncta quadrato quadratica, lateraue singularia.
	•	C Q R.			
	QQ 1	QQ 1 1			
Planoplanum ablatitium.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.		
Reliquum resoluendi quadrato quadrati.	2 9	6 9 7 6			

II. Eductio lateris singularis secundi.

		2 9	6 9 7 6	
Diuisores	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sextuplū quadratum eiusdem.		2 4	
	Quadruplū idē latus.		8	
Summa diuisorum.		3	4 4 8	
Plano-plana ablatitia		1 9	2	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
		8	6 4	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi
		1	7 2 8	A cubo secundi in quadruplum lateris primi
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum æqualis residuo resoluendi Quadrato-quadrati.		2 9	6 9 7 6	

Quādo residuum non foret æquale summæ plano planorum.

Quod si residuum non fuisset æqualis summæ planoplanorum, &c. latus elicietur proximè vero, vt Arithmetici docent, nimirum adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & ex hoc extenso elicietur latus Quadratoquadratum, & procedetur vt supra.

E dato in numeris Quadrato-cubo puro latus analyticè elicere.

Numerus Quadrato cubus componi quidem intelligitur à tot singularibus lateribus, quot figuris latus vniuersale quæsitum constat, in genesi Quadrato-cubi.

Signatio per puncta in hac æquatione quo pacto fieri debeat.

Vt autem hunc figurarum numerum assequamur, fieri debet designatio per puncta hunc in modum. Extrema numeralis figura Quadrato-cubi initio ducto à sinistris ad dextram procedendo, signanda est puncto; è reliquis verò in anteriora progrediendo, quintæ quæque figuræ signari debent, quatuor intermedijs relictis; cum nimirum quinque gradibus scansilibus ad quadrato-cubum perueniatur, videlicet R, Q, C, QQ. Cum igitur duo sint puncta, tot etiam constare quadrato cubus vniuersalis, singularibus quadrato-cubis, atq; etiam latus vniuersale, tot lateribus singularibus, pronunciabitur.

Cum autem quadrato-cubus componitur à duobus singularibus lateribus.

Theorema syntheticū.

Q C, lateris primi.
+ latere secundo in Q Q, quintuplum lateris primi.
+ lateris secundi C in Q, decuplum lateris primi.
+ lateris secundi Q in C, decuplum lateris primi.
+ lateris secundi Q Q, in latus primum quintuplum.
+ Q C lateris secundi.
Aequale est Quadrato-cubo aggregati laterum.

Paradigma analyſeos Quadratocubi puri.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Quadratocubus reſoluendus.	1 18	81376	Sedes ſingularium quadrato cuborum, & plano ſolidorum ſub gradibus.	0 • 2 6	Tot numerales circuli, quot puncta quadrata-cubica, lateraue ſingularia.
	•	QQCQR.			
	QC 1	QCn			
Plano-ſolidum ablatitium	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.		
Reliquum reſoluendi quadrato-cubi.	8 6	81376			

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Reliquum reſoluendi quadrato-cubi.		8 6	8 1 3 7 6
Diuiſores	Quintuplū Q Q lateris primi.	8	0
	Decuplus cubus eiuſdem.		8 0
	Decuplum quadratū eiuſdem.		4 0
	Quintuplum latus primum.		1 0
Summa diuiſorum.		8	8 4 1 0

Plano ſolida ablatitia.	4 8	0	A latere ſecundo in quantuplum QQ lateris primi.
	2 8	8 0	A Q, lateris ſecundi in decuplum cubum primi.
	8	6 4 0	A Cubo lateris ſecundi in decuplum quadratum primi.
	1	2 9 6 0	A quadr.quad. ſecundi in quintuplum latus primum.
		7 7 7 6	Quadr. Cubus lateris ſecundi.
Summa plano-ſolidorum æqualis reſiduo reſoluendo quadrato cubo.	8 6	8 1 3 7 6	

E dato in numeris Cubo puro latus analyticè elicere:

Proposita sit æquatio huiusmodi 1CC = 191102976, quæratur Radix.

Fiat designatio per puncta, ut collocetur punctum sub extrema figura 6; hoc enim punctum designat unitates metientes extremum Cubo-cubum. At verò cum ab unitatibus ad Cubo cubum sint quinq; gradus R, Q, C, QQ, QC; ob id quinq; intermediæ figuræ sunt ommittendæ; his autem quinq; intermissis 79201, quæ rursus occurrit 1, signanda puncto. Genesis autem Cubo-cubi sic se habet.

CC lateris primi.
+ latere secundo in QC, primi sextuplum.
+ lateris secundi Q, in QQ, primi decuquintuplum.
+ lateris secundi C, in C, primi vigecuplum.
+ lateris secundi QQ, in Q, primi decuquintuplum.
+ lateris secundi QC, in latus primum sextuplum.
+ lateris secundi CC.
Aequatur Cubo-cubo aggregati laterum.

Theorema Syntheticum.

His autem animaduersis analysis non latebit, & instituetur ad eum modum, quo hic conspicitur.

Paradigma analyseos Cubocubici puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Cubocubus resoluendus.	191	102976	Sedes singularium cubocuborũ, & solidosolidorũ sub gradibus.	0 0	Tot numerales circuli quot puncta cubocubica laterane singularia.
	.	QC. QQ. C. Q. R.		R 2 : 4	
				Q 4 : 16	
	CC 1	CC 1		C 8 : 64	
				QQ 16 : 256	
				QC 32 : 1024	
				CC 64 : 4096	
Solido-solidum ablatitium.	64		Cubocubus lateris primi.		
Reliquum resoluendi cubocubici.	127	102976			

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Cubocubi	127	102976	
Diuisores: Sextupla Quadratocubi lateris primi.	192		
Decuquintuplũ quadrato quadrati eiusdem.	24	0	
Vigecuplus cubus eiusdem.		160	
Decuquintuplũ quadrati eiusdem.		60	
Sextuplum latus primum.		12	
Summa diuisorum.	21	76612	
Solido solida ablatitia.	76	8	A latere secundo in sextuplum QC lateris primi.
	38	40	A Q secundi in decuquintuplum QQ primi.
	10	240	A C, secundi in vigecuplum cubum primi.
	1	5360	A QQ secundi in decuquintuplum, Q primi.
		12288	A QC, secundi in sextuplum latus primum.
		4096	Cubocubus secundi.
Summa solido solidorum æqualis resoluendo CC.	127	102976	

SCHOLION.

Modos attulimus, quibus iuxta Vietam sunt elicienda Radices, & quidem ℞ Q, ℞ C, ℞ QQ, ℞ QC; *Possunt attamen, supradicta, & cætera etiam Radices extrahi, methodo quidem antiqua non minùs fæliciter; vt cuicunq; etiamsi leuiter in hoc puluere versato, perspicuum esse potest. Perinde si quidem est huius æquationis* 1 Q $=$ 4096. *Radicem quadratam extrahere, ac est ex numero* 4096, *Radicem eruere quadratam; quemadmodum huius æquationis* 1 C $=$ 592704. *Radicem exhibere nil aliud est, quàm ex numero* 592704, *latus cubicum eruere, & ita de alijs Radicum generibus intelligendum; quo verò modo huiusmodi Radices extrahantur, in Arithmetica practica pertractatur.* Supradictæ æquationes explicari possunt extractione radicum, quẽadmodũ antiquè docuerunt.

De

De explicatione Æquationum compositarum, siue affectarum, & primò de explicandis Æquationibus Quadraticis affectis sub latere.

CAPVT XII.

Quid sit æquatio composita, siue affecta: vide supra.

RElìquum est, vt de affectis æquationibus sermonem habeamus, dictum est autem superiùs, quid ipsa sit æquatio composita, seu affecta. Et quidem ad ipsas explicandas, non vna est methodus, sed variæ, atq; diuersæ; plures itaq; in medium afferemus, vt quisq; eam eligere possit, ex ipsis, quæ sibi magis opportuna videbitur. Ducemus autem exordium ab ijs, quæ sunt natura priores; nimirum quadraticis, progressuri deinceps, ad vlteriores, idq; omni claritate, ac breuitate præstabimus.

Tres sunt æquationes species.

Superiùs ostendimus tres esse huius æquationis compositæ, siue affectæ species. Primam Q + R = N Secundam Q — R = N. Tertiam R — Q = N. Plures autem modos, ac methodos ad ipsas explicandas afferemus.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter Q + R, & N.

Methodus Diophanti.

Explicatur methodus Diophanti.

PRoducto ex numero quadratorum in numerum absolutum, addatur quadratum ex dimidio numeri radicum; & ab aggregati latere, auferatur dimidium numeri radicum; residuum verò diuidatur per numerum quadratorum: etenim quotiens exhibebit lateris, seu radicis pretium.

EXEM-

EXEMPLVM.

5 Q + 10 R = 175.

5 *Numerus Quadratorum* } *Multiplica.*
175 *Numerus absolutus* }

Illustratur exẽplis superior doctrina.

875 *Productum* } *Adde.*
25 *Quadratum dimidij numeri Radicum* }

900 *Aggregatum.*

30 ℞ Q *Aggregati* } *Subtrahe.*
5 *Dimidium numeri Radicum* }

25 *Residuum diuidendum.*
5 *Numerus quadratorum, & diuisor.*
5 *Quotiens, & vnius Radicis pretium.*

Non dissimili modo procedendum erit, cum irrationales numeri intercesserint.

EXEMPLVM.

2 Q + 4 R = 20.

2 *Numerus Quadratorum* } *Multiplica.*
20 *Numerus absolutus* }

Eadem est obseruanda methodus intercedentibus numeris irrationalibus,

40 *Productum* } *Adde.*
4 *Quadratum dimidij numeri Radicum* }

44 *Aggregatum.*
℞ Q 44 ℞ Q *Aggregati* } *Subtrahe.*
2 *Dimidium numeri Radicum* }

℞ Q 44 — 2 *Residuum diuidendum.*
2 *Numerus quadratorum, & diuisor.*
℞ Q 11 — 1 *Quotiens, & 1 R, pretium.*

Eademq; methodus obſeruanda eſt, quomodocunq; irrationales numeri occurrant.

Methodus Communis Antiquorum.

Communis antiquorũ methodus explicatur.

QVadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus, ex huius aggregati latere ſubtrahatur dimidium numeri radicum, etenim reſiduum erit lateris, ſeu radicis pretium.

EXEMPLVM.

1 Q ✻ 10 R ═ 96.

5 *Dimidium numeri Radicum.*

25 *Eius quadratum* } *Adde.*
96 *Numerus abſolutus* }

121 *Aggregatum.*

11 ℞ Q *aggregati* } *Subtrahe.*
5 *Dimidium numeri Radicum* }
6 *Lateris valor, ſeu vnius Radicis pretium.*

Quãdo occurrunt numeri irrationales.

Eodem modo, cum occurrerint numeri irrationales.

EXEMPLVM.

1 Q ✻ 2 R ═ 10.

1 *Dimidium numeri Radicum.*

1 *Eius quadratum* } *Adde.*
10 *Numerus abſolutus* }

11 *Aggregatum.*

℞ Q 11 ℞ Q *Aggregati* } *Subtrahe.*
1 *Dimidium numeri Radicum* }

℞ Q 11 — 1 *Lateris valor, ſeu 1 R, pretium.*

SCHO-

SCHOLION.

Ex hactenus explicatis, etiam perspicuè liquet, quo pacto sit eruenda radix, dum æquatio habuerit pro comparationis homogeneo, aliquem numerum compositum, siue binomium, siue residuum. Sit igitur æquatio iuxta methodum Diophantæam explicanda. Quando cõparationis homogeneum fuerit numerus compositus, &c.

5 Q + 4 R = 15 + ℞ Q 48.

5 Numerus quadratorum.

15 + ℞ 48 Numerus comparationis homogeneum.

---

75 + ℞ 1200 Productum } Adde.

4 Quadratum dimidij numeri radicũ } Adde.

---

79 + ℞ 1200 Aggregatum.

2 + ℞ 75 ℞ Q Aggregati } Subtrahe.

2 Dimidium numeri radicum } Subtrahe.

℞ 75 Residuum diuidendum

5 Numerus quadratorum, & diuisor.

℞ 3 Quotiens, & 1 R, pretium.

Iuxta methodum communem antiquorum sit æquatio huiusmodi

1 Q + 30 R = 3 + ℞ 2700.

15 Dimidium numeri Radicum.

---

225 Eius quadratum } Adde.

3 + ℞ 2700 Comparationis homogeneum } Adde.

---

228 + ℞ 2700 Aggregatum.

15 + ℞ 3 ℞ Q Aggregati. } Subtrahe.

15 Dimidium numeri Radicum } Subtrahe.

℞ 3 Lateris valor, seu 1 R, pretium.

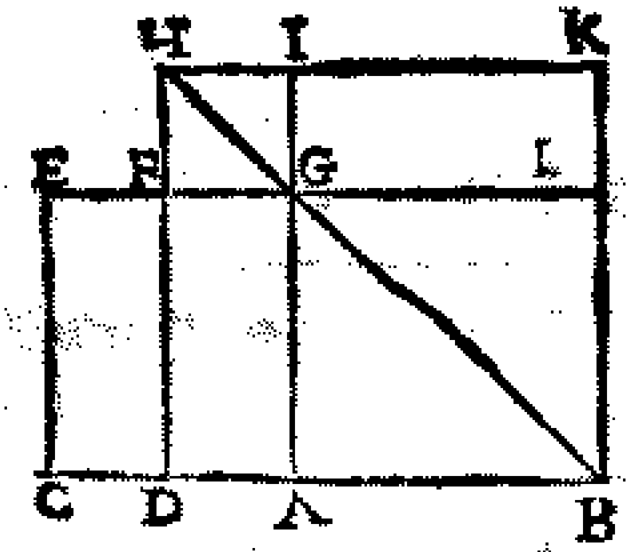
Non dissimili artificio in omnibus alijs æquationibus huius generis procedendum.

Et ita in consimilibus æquationibus procedendum erit; hisce quandoquidem methodis optata consequeris, dummodo memoria teneas illa præcepta, quæ de numeris irrationalibus traduntur.

DEMONSTRATIO.

Superior doctrina demonstratur.

HVius autem methodi demonstratio sic se habet. Sit AB, latus ignotum, & AC, radicum numerus; diuidatur AC, bifariam in D, super BD, constituatur quadratum DB KH, ducta diametro BH, ducatur ad DH, parallela AI, secans BH, in G, agatur LE, per G, parallela ipsi BC, occurrens ipsi CE, in E, quæ ducta intelligatur parallela rectæ DH. Quoniam AL, FI, sunt [a] quadrata; continebitur rectangulum CG, sub CA, numero radicum, & AG, radicis, seu lateris pretio quæsito: itaut CG, sit radicum pretium (Numerus enim radicum ductus in Radicis pretium, facit radicum valorem) ob id DG, erit dimidium, cum DG, DE, sint [b] æqualia; at verò DG, GK, sunt [c] æqualia; ergo erunt CG, pretio radicum, æqualia complementa DG, GK, simul. Cum autem AL, vna cum pretio radicum CG, quorum numerus natus est CA, æquale sit cuidam numero absoluto (est enim æquatio inter Q + R, & N,) vt supponimus; erit ob id gnomon FGI, æqualis numero illi absoluto. Si verò gnomon FGI, addatur ad quadratum FI, quod est quadratum segmenti DA, dimidij numeri radicum; fit quadratum notum DK: à cuius latere DB, dempto DA, remanet AB, notum, nempè radicis pretium.



a Corol. 4. secundi.

b 36. primi.

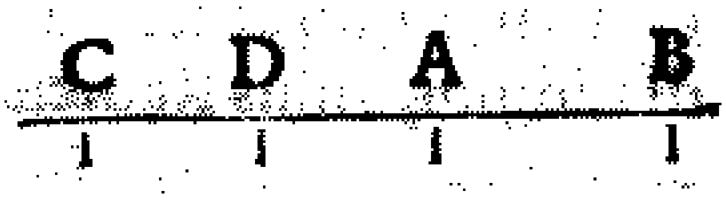
c 43. primi.

Aliter verò sic eisdem positis, nempè CA, numero radicum, & AB, lateris pretio; diuisaq; sit CA, bifariam in D: cum CA, sit bifariam secta in D, & ei addita AB; erit [a] rectangulum CBA, vna cum quadrato segmenti DA, æquale quadrato rectæ DB, sed quadratum ipsius DB, æqua-

a 6. secũdi.

æquale est b quadrato segmenti A B, vna cum duplo rectangulo DAB, hoc est CA, AB, radicum omnium pretio (numerus si quidem radicum, ductus, in pretium radicis, facit omnium radicum pretium) vna cum quadrato segmenti D A: ergo rectangulum C B A, vna cum quadrato segmenti DA, æquale erit quadratis segmentorum A B, D A, vna cum duplo rectangulo DA B, seu C A B, simplo. Vtrinq; ablato quadrato segmenti D A, remanebit rectangulum CBA, æquale quadrato segmenti AB, vna cum duplo rectangulo DAB, siue CAB, simplo nempe radicum pretio, æquale cuidam numero absoluto, seu comparationis homogeneo (est enim æquatio Q ✝ R ⚌ N,) ergo illi numero absoluto æquale erit rectangulum C B A, sed hoc vna cum quadrato segmenti D A, dimidij numeri noti radicum, æquale est quadrato segmenti D B. Itaq; ad quadratum segmenti DA, addito noto numero absoluto, fiet notum quadratum illud, cuius nimirum latus est DB; si verò abs DB, auferatur DA, remanebit AB, radicis pretium, vtpote illud cuius quadratum, vna cum rectangulo comprehenso sub se, & numero radicum C A, æquale est numero absoluto, &c. quod ostendendum erat.

b 4. secũdi.



S C H O L I O N.

Non desunt aliæ demonstrationes hanc methodum confirmantes, verum illas non immeritò prætermittimus. Tùm quia per breuitati consulimus; Tùm quia libet eas in speciosam Algebram differre, itaq; ne bis eadem repetantur, consultò hîc eas placuit silentio præterire; Aduerte autem cum inter demonstrandum mentionem fecimus numeri absoluti, per hunc intelligendum volumus comparationis homogeneum, vt etiam aliàs innuimus.

Prætermittuntur aliæ demonstrationes ad hanc methodũ confirmãdum.

Methodus Petri Nonij.

Methodus Petri Nonij explicatur.

QVadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & ex aggregato sumatur latus quadratum, à quo auferatur numerus radicum; namq; residui dimidium, vnius Radicis pretium repræsentabit.

EXEMPLVM.

1 Q ✠ 20 R ═ 125.

4 0 0 *Quadratum numeri Radicum.*
5 0 0 *Quadruplum numeri absoluti.*

9 0 0 *Aggregatum.*
3 0 *Aggregati latus* } *Subtrahe.*
2 0 *Numerus radicum* }

1 0 *Residuum.*
5 *Residui dimidium, & 1 R, valor.*

Quando intercedant numeri irrationales.

Eadem arte hoc totum expediri poterit per numeros irrationales, si ij quidem intercesserint, vt sit æquatio.

EXEMPLVM.

1 Q ✠ 10 R ═ 100.

1 0 0 *Quadratum numeri Radicum.*
4 0 0 *Quadruplum numeri absoluti.*

5 0 0 *Aggregatum.*
℞ Q 5 0 0 *Aggregati latus* } *Subtrahe.*
1 0 *Numerus radicum* }

℞ Q 500 — 10 *Residuum.*
℞ Q 125 — 5 *Residui dimidium, & 1 R, valor.*

DE-

DEMONSTRATIO.

SIt A B, radix quæsita, & A C, radicum numerus; ipsi verò AB, sit æqualis BD. Quoniam ergo AC, est radicum numerus, & AB, latus ignotum; rectangulum (AB, contentum sub CA, radicum numero, & AB, radicis pretio, erit omnium radicum valor (vt supra dictum est) & quia quadratum ex AB, vna cum rectangulo C A B, radicum pretio, ponitur æquale numero cuidā absoluto (est enim æquatio Q + R = N) ob id erit rectangulum C B A, numerus absolutus, cum ipsi sit æquale quadratum ex A B, vna cum rectangulo CAB: sed quia CB secta est vtcunq; in A; erit [a] rectangulum quater comprehensum sub CB, BA, seu BD, vna cum quadrato segmenti CA, æquale quadrato ipsius CD. Dicebamus autem rectangulum CBA, esse numero absoluto æquale: ergo quadruplum numeri absoluti, vna cum quadrato ex C A, numero radicum æquale erit quadrato totius CD; seu quod idem est, addito quadruplo numero absoluto ad quadratum ex C A, numero radicum, fiet notum quadratum rectæ C D. At verò si ex cognita CD, auferatur C A, nota, remanebit recta A D, dupla lateris A B: ergo si ad quadratum numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & ex aggregato sumatur latus, à quo dematur numerus radicum, remanebit duplum radicis quæsitæ. Quod oportebat ostendere.

Demōstratio supradictorum.

a 8. secūdi.

Methodus peculiaris Vietæ.

SVmatur numerus cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & hic tanquam numerus medius trium proportionalium numerorum statuatur; seu tanquam latus medium proportionalium laterum colligetur; extremorumq; differentia sit numerus radicum. Reperiantur extremi

Peculiaris Vietæ methodus explicatur.

tremi numeri, seu extrema latera; minor etenim numerus, seu minus latus, ex ipsis quæsitam radicem exhibebit.

EXEMPLVM.

Sit æquatio 1 Q + 30 R = 400.

Explicãtur superiora præcepta. Numerus absolutus, seu comparationis homogeneum sit 400; cuius ℞ Q est 20, & radicum numerus sit 30, fiat hic numerus differentia extremorum. Quoniam quadratum medij æquale est rectangulo sub extremis; notum ob id erit huiusmodi rectangulum, & numerorum extremorum differentia, & quia quadratum differentiæ laterum (vt ostendimus in nostrorum Problematum analysi) additum quadruplo rectangulo sub lateribus, æquatur quadrato aggregati laterum; proinde 400, ducantur in 4, & fient 1600, his addatur 900, quadratum 30, differentiæ laterum, fit summa 2500, & huic æquatur 1Q, quadratum scilicet aggregati laterum, seu extremorum ex tribus proportionalibus, &c. si nimirum illud ponamus esse 1R, quare ℞Q, numeri 2500, nempe 50, erit extremorum summa. Habita verò summa, & differentia extremorum habentur extrema, vt alibi diximus; eruntq; 40, & 10: itaq; lateris valor in æquatione composita superiùs posita erit 10.

DEMONSTRATIO.

Huius methodi demõstratio in speciesam Algebram differtur. HVius autem methodi demonstrationem in Algebra speciosa nos afferemus: vbi etiam, quod dicebamus, nempe quadratum differentiæ laterum, vna cum quadruplo rectangulo sub lateribus æquari quadrato ex aggregato laterum ostendemus.

Methodus Steuini.

Methodus Steuini explicatur. MEthodus hæc cum sequentibus nedum idonea est ad has æquationes explicandas, verùm etiam ad ad alios, quorum analysin antiquos ignorasse dicebamus.

Sumantur numeri quicunq; ad libitum, qui quidem opportuni credantur; & de his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec quæsitus reperiatur numerus Problemati satisfaciens. Hoc verò vt methodicè fiat, reperiatur primò numerus notarum Arithmeticarum, ex quibus constat latus quæsitum; mox inuestigetur prima, quam necesse est esse vnam ex his 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & eadem arte inuestigetur secunda, & aliæ si adsint, pacto eodem.

EXEMPLVM.

1Q ✠ 10R ⩶ 75.

Primò examinandum est; num hoc latus constet ex pluribus notis, an ex vna tantùm. Fingo 1R, pretium esse 1, ergo 10R, valebunt 10, addito quadrato ex 1, nempe 1, fit summa 11, & erit æquatio inter 11. & 75, quod falsum est. Concludo ob id latus maius esse quàm 1, fingo esse 2, ergo 10, valebunt 20, addito 4, quadrato ex 2, fit summa 24, & erit 24 ⩶ 75, quod falsum est. Concludo proinde quæsitum latus maius esse quàm 2, fingo esse 7, ergo 10R, valebunt 70, addito 49, quadrato ex 7, fit summa 119, & erit 119 ⩶ 75. Concludo ergo latus minus esse quàm 7, atq; demum concludo latus non constare ex pluribus notis, sed ex vnica, & ita reperiam minus esse quàm 6, neq; vnquam satisfacere, nisi statuatur numerus 5, nàm 10R, valebunt 50, addito 25, quadrato ex 5, fit summa 75, & est æquatio 75 ⩶ 75. Quod verum est, eodem modo procedendum erit, si quæsitum latus ex pluribus constet notis; cum enim periculum fecerimus ad indagandam priorem notam, ducendo initium ab 1, ita ad indagandam secundam duci debet initium ab 0.

Exēplo superior methodus illustratur.

Sit æquatio 1Q ✠ 14R ⩶ 312. Fingo figuram esse 1, ergo 14R, valebunt 14, his additis ad 1, quadratum ex 1, fit summa 15, & erit æquatio 15 ⩶ 312, quod factum est. Fingo latus esse 9, ergo 14R, valebunt 125, quibus additis

tis

tis ad 81, quadratum ex 9, fit summa 207, & erit 207, ⊏⊐ 312, quod est falsum. Concludo proinde latus constare ex pluribus notis, quàm vna; fingo ob id latus esse 10, fit summa 240, & erit æquatio 240 ⊏⊐ 312, quod est falsum; propterea concludo latus maius esse, quàm 10, atq; adeo secundam notam maiorem esse, quàm 0; & ita procedendo deinceps, reperiam latus non constare ex pluribus, quàm ex duabus figuris, & secundam non esse maiorem, quàm 2, & quæsitam radicem esse 12.

Methodus Coigneti.

Huius methodi præcepta.

EXponantur partes aliquotæ numeri absoluti, & in singulis periculum fiat, donec reperiatur illa, quæ Problemati satisfacit. Cum enim radicis pretium sit perpetuò aliquota pars numeri absoluti, perquirendo partes aliquotas, facilè erit quæsitam reperire.

EXEMPLVM.

Exempla.

Sit æquatio 1 Q ✳ 10 R ⊏⊐ 75. Sumantur partes aliquotæ, numeri 75, quæ sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75. In his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec vna ex ipsis reperiatur Problemati satisfaciens, & ita comperietur 1 R, pretium, reperiemus enim 5, esse partem quæsitam, &c.

Sit æquatio 1 Q ✳ 10 R ⊏⊐ 375, exponantur partes aliquotæ 1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, ex ipsis reperiemus quæstioni satisfacere 15, partes autem aliquotæ cuiuscunq; numeri, facilè deprehenduntur, vt facilè diximus.

Methodus Girardi.

Methodus Girardi traditur.

SVmantur partes aliquotæ numeri absoluti, & ita ordinentur; vt binæ contra se positæ per multiplicationem, efficiant prætatum numerum absolutum, quę quidem partes efficientes appellantur. Mox vtraq; ęquationis pars diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum gradum inferiorem, cuius æquationis sensus erit, vt si numerus radicum subtrahatur ab aliqua ex partibus aliquotes, relinquatur 1 R, valor.

EXEMPLVM.

Sit æquatio 1 Q ⊐ 10 R ✠ 75.

Exempli illustratur.

1 —— 75)
3 —— 25 (Efficientes numeri 75.
5 —— 15)

Partes aliquotæ numeri 75, sunt 1, 3, 5, 15, 25, & 75.

Sunt autem ita dispositæ, vt binæ contra se positæ efficiant numerum ipsum 75, vt vides, diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, & fiet æquatio huiusmodi 1 R ⊐ — 10 ✠ $\frac{75}{1 R}$. Hoc est 10, si subtrahatur ab aliqua parte aliquota numeri absoluti 75, relinquetur pars altera coefficiens correlata, & valor lateris, ea est autem eligenda pars, à qua si auferantur 10, fiat, & remaneat altera pars coefficiens correlata. Pars autem ista erit 15, etenim si à 15, subtrahantur 10, remanet 5, pars altera coefficiens correlata; secus si subtraherentur à 25, exempli gratia; propterea quod remanerent 15, hic autem numerus non est pars coefficiens correlata, cum ipsa sit 3, respectu 15, ipsius radicis pretium ergo erit 5.

Methodus generalis Vietæ.

Generalis methodus Vietæa explicatur.

GEneralem hanc methodum priùs afferemus iuxta formam Vietæam; postea secundum alium processum compendiosiorem. Primò quidem si proponatur æquatio huiusmodi 1 Q ✠ 12 R ⊐ 58528, Analysis hoc sequenti modo ordinabitur.

Paradigma analyſeos Quadrati affecti ſub latere affirmatè.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo		1 2		Subiateralis 0 0 0. Tot puncta 2 3 6 lateralia, Q 529: 36. quot quadratica. Tot numerales circuli, quot producta quadratica, lateraue ſingularia.
	ſ	8 5	2 8	
	.	R. .	R. .	
	Q 1	Q 11	Q 111	
Plana ablatitia	4			Quadratum lateris primi.
		2 4		Planum à latere primo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum.	4	2 4		
Reliquum reſoluendi quadrati affecti.	1	6 1	2 8	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

		1	2	
Reliquũ reſoluendi quadrati affecti.	1	6 1	2 8	
Diuiſorum pars inferior. Duplum lateris primi.		4		
Summa diuiſorum		4 1	2	
Plana ablatitia.	1	2		A latere ſecundo in duplum primi.
		9		Quadratum lateris ſecundi.
		3	6	A latere ſecundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda.	1	3 2	6	
Reliquum reſoluendi affecti quadrati.		2 8	6	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, ſeu primi & fit.

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij, tanquam secundi.

Diuisorum pars superior	Coefficiens longitudo.		1 2	
	Reliquum resoluendi affecti quadrati.	2 8	6 8	
Duplum lateris eliciti.		4	6	
Summa diuisorum.		4	7 2	
Plana ablatitia.		2 7	6	A latere secundo in duplum lateris primi.
			3 6	Quadratum lateris secundi.
			7 2	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi quadrati affecti.		2 8	6 8	

Aequatio, quam attulimus est in qua quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine; & è quadrato sic affecto propositum nobis est latus analyticè elicere. In huiusmodi æquatione coefficiens longitudo est 12, numerus autem 58528, non est quadratum purum, sed affectum sub latere, & data longitudine 12. Inter genesim autem quadrati affirmatè affecti, & genesim puri quadrati hoc tantum interest, vt ordinata genesis quadrati affecti affirmati hoc amplius exposcat, vt latus singulare, quod primùm elicitur, ducatur in coefficientem longitudinem; hoc enim est, quod ordinata genesis huius quadrati affecti addit genesi quadrati puri; fit igitur signatio per puncta ad eum modum, quo supra notauimus; atq; etiam quot numerantur sedes quadratorum, atq; puncta, tot laterum sedes punctis superiùs positis designabuntur, atq; constituentur per figuras singulas à dex- *Præcepta ad hanc æquationē explicādā.*

 tra-

tra ad læuam procedendo. Atq; in vltima laterum ſede, quæ prima fit à læua, ad dextram conſtituetur coefficiens longitudo. Porrò numerus hic, qui coefficiens longitudo dicitur, ſi pluribus, quàm vna figura conſtet; reliquæ figuræ prorumpunt in anteriora verſus ſiniſtram. His autem peractis non ſecus elicienda ſunt latera ſingularia, ac factum fuit in analyſi quadrati puri. Hic enim hoc vnum amplius eſt obſeruandum, quòd coefficiens longitudo inter diuiſores recenſetur; latera verò ſingularia elicita ducuntur in coefficiẽtem longitudinem; planum autem quod inde fit, ſubijciendum, vt deſinat ſub ſede coefficientis, & auferendum eſt ab ipſo quadrato affecto. Deniq; ipſamet longitudo coefficiens, in loca ſuccedentia ordine ſubijcitur, vt etiam ſubtus diuiſores reliqui mouebuntur. Hæc autem præcepta in ſuperiori paradigmate quidem obſeruata cernis.

Facilius abſoluetur quæ ſuperius dicta ſunt.

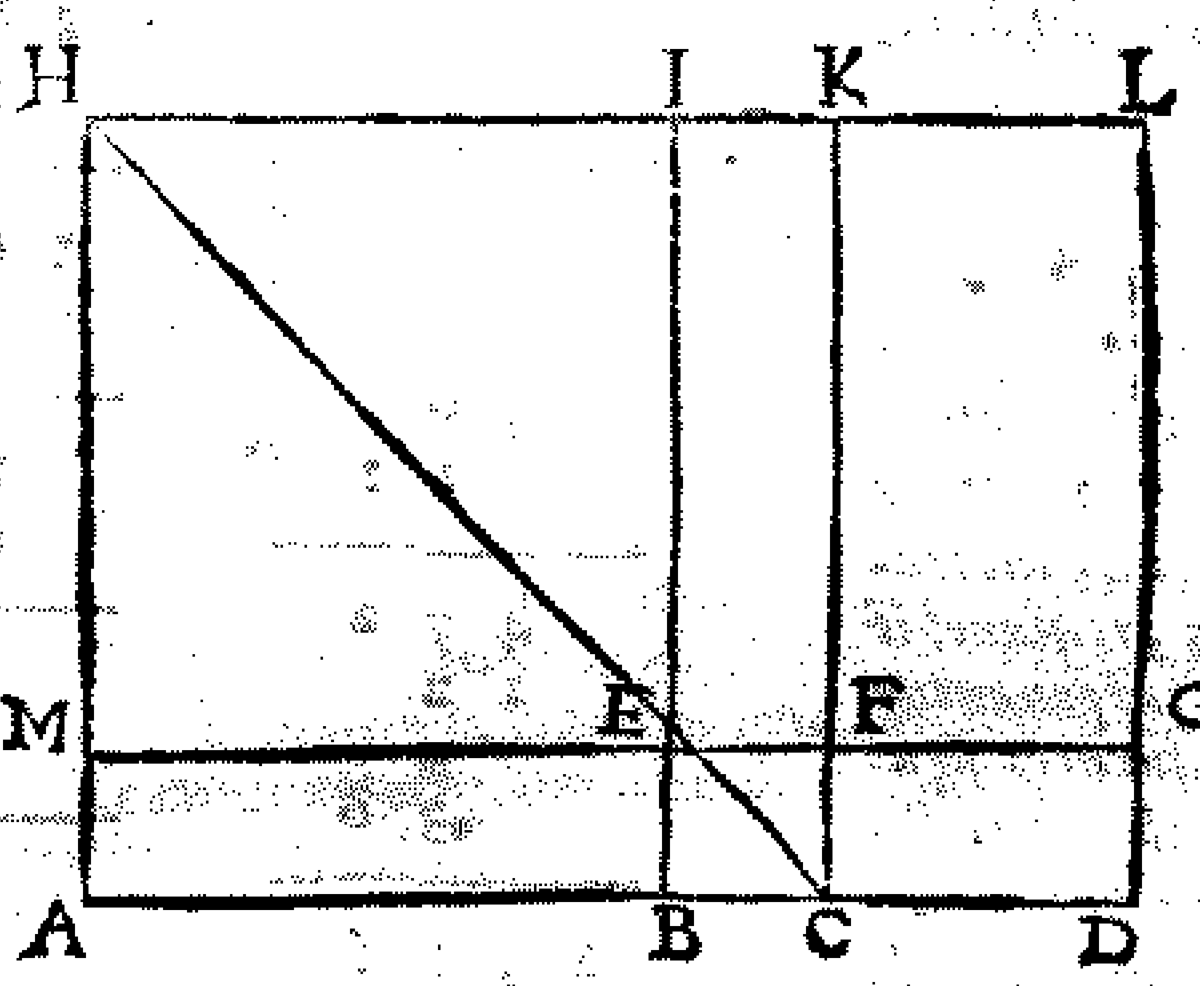
Superior methodus facili negotio demonſtrari poteſt. Sit enim æquatio 1Q + 12R = 864. Methodus præcipit, vt reperiamus latus quadratum ex primo numero; nimirum ad primum punctum, ſcilicet ex 8, cuius latus quadratum eſt 2, huius quadratum eſt 4, quo ſubſcripto vt vides, debemus ducere 12, coefficientem longitudinem in 2, primum ſingulare latus, vt fiat 24; at verò 4, in eo ſitu ſignificat 400, & 24, ſignificat 240; itaut dum colligimus in vnam ſummam 4, & 24, vt fiat 64, intelligatur fieri 640; hoc autem ſubtracto ex 864, relinquitur 224.

R	2	4
Q	4	16

1	2
8	6 4
4	
2	4
6	4
2	2 4
	1 2
2	2 4
	4
	5 2
1	6
	1 6
	4 8
2	2 4

Hoc

Hoc autem cernere licet in adiuncto schemate, nam quadratum ex 2, hoc est ex 20, est 400, MEIH, rectangulum sub 2, hoc est sub 20, nimirum FK, & 12, coefficiente longitudine, scilicet CD, seu FG, est 240, KFGL; Itaq; dum ex toto HD, comparationis homogeneo 864, auferimus HE, & KG, remanebit MB, EK, EC, FD, nempe 224. Vt habeatur autem BC (huc usq; enim habuimus AB) & quod quæritur est AC; si nos quod remanebat 224, scilicet AB, EK, EC, FD, applicemus ad longitudinem conflatam ex AB, seu ME, & EI, seu FK, hoc est ex dupla AB, *Superioris generalis methodi demonstratio.*



nempe ex duplo primi lateris, & CD, coefficiente prosiliet in quotiente EB, seu BC, (est enim EC, quadratum, si quidem AK, quadratum est, 2) prosiliet inquam, si quotiens *24. secūdi.* tali cautela eliciatur, vt si quotiens ducatur in duplum illud AB, producat planum, quo subtracto ex illo, diuiso, & ex residuo subtracto quadrato eiusdem quotientis, vna cum plano facto ex quotiente, & coefficiente CD, nihil remaneat. Vel breuius, vt ex applicatione remaneat aliquid, illudq; si quadratum ipsius quotientis. Vt in hoc casu si 224, applicemus ad 52, fiet quotiens 5, sed superest

14.

14, tantùm, qui non est quadratum ipsius 25, at si quotiens fuerit 4, supereſt 16, quadratum eiusdem 4.

SCHOLION.

Breuiori methodo, quæ dicta sunt explicantur.

Facta per puncta designatione figurarum iuxta quadrata radicis exigentiam, poterit etiam hunc in modum analysis institui. Quoniam in superiori exemplo tria sunt puncta, tres etiam erũt figuræ, ex quibus integrum latus constabit. Extrahatur latus primæ figuræ 5, sub qua cadit punctum, eius autem radix erit 2, cuius quadrato 4, subtracto ex 5, remanebit 1, cui apponantur duæ sequentes figuræ, quales sunt 8, & 5, vt fiat numerus 185, & huic subijciatur numerᵒ 24, ita tamen, vt 2, cadat sub 8, & 4, sub 5, numerus inquam 24, productus ex 2, prima figura in 12, numerum radicum, & remanebit 161, cui apponatur 2, figura sequens in numero, &c. vt fiat

```
1Q + 12R = 2  3  6
           5 8 5 2 2
           .   .   .
           1 8 5
             2 4
           -------
Diuisor primus 412
Diuisor secundus 472
             1 6 1 2
             1 3 2 6
             -------
             2 8 6 8
             2 8 3 2
             -------
                 3 6
                 3 6
                 ---
                 0 0

    4 6
      1 2
    -------
    4 7 2
    1 2
      9
      3 6
    -------
  1 3 2 6
      4 6
        6
    -------
    2 7 6
      7 2
    -------
    2 8 3 2
      3 6
    -------
    2 8 6 8
```

1612.

16128. Ad habendam secundam figuram, sumatur 4, duplum primæ figuræ, cui apponatur 12, numerus radicum, vt fiat numerus 412, & per hunc diuidere oportet 16128, diuisione instituta fiet quotiens 3, vt subtrahi possint ea, quæ sunt subtrahenda, erit igitur 3, secunda figura. Modo sumatur 4, duplum primæ figuræ 2, in hunc autem numerum ducatur 3, secunda figura, vt fiat 12, cui addi debet 9, quadratum secundæ figuræ. Sed debet fieri additio, vt vides. Mox addatur 36, productum ex 12, numero radicum in 3, secundam figuram, & fiet 1326, facta subtractione vt vides à 58527, remanebit numerus 2868. Ad inuestigandam tertiam figuram sumatur duplum numeri 23, se habentis veluti prima figura, & est 46, huic addatur 12, numerus radicum, ita vt 1, sit sub 8, & fiet diuisor 472, per quem diuidatur 2868, & fiet quotiens 6, qui ductus in 46, duplum primæ figuræ, facit 276, cui addito 72, numero producto ex secunda figura in 12, numerum radicum, facta tamen additione, vt 7, cadat sub 6, fit numerus 2832, facta subtractione, remanebit 36, numerus à quo subtrahi debet 36, quadratum ex 6, tertia figura, vt remaneat 0.

Quamobrem æquationis propositæ in numero absoluto tali fiat ordine per puncta figurarum signatio. Notentur omnes figuræ in imparibus locis initio facto à dextris ea lege, vt semper alternatim vna intermittatur inter designandum figura; deinde super notas punctis designatis, numerus ponatur, cuius quadratum subtractum ab ipso numero absoluto numerum relinquat, æqualem numero facto ex multiplicatione numeri radicum in numerum inuentum. *Explicatur præcepta superiùs tradita.*

Sit æquatio 1Q ✠ 10R ═ 75. In numero 75, fiat signatio per puncta, vt dictum est, & vnica erit figura notanda, vt patet, nempe 5; deinde reperiatur numerus illius conditionis, vt supra. Numerus quæsitus esto 5, ponatur supra 5, secũdam figuram numeri 75, eius quadratum 25, subtrahatur ex 75, & re-

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1Q ✠ 10R ═ 75 \\ 25 \\ \hline 50 \\ 50 \\ \hline 00 \end{array}$$

mane-

manebunt 50: ducatur numerus 5, in 10, numerum radicum, & productus numerus 50, subtrahatur à 50, nihil remanebit; proinde concludendum erit 5, esse 1 R pretium.

Non dissimili modo si foret æquatio 1 Q ✱ 12 R ⊐ 160.

	8
1 Q ✱ 12 R ⊐	1 6 0
	· ·
	6 4
	9 6
	9 6
	0 0

Proponitur altera æquatio explicanda.

Si verò proponeretur 1 Q ✱ 12 R ⊐ 405, procedendum quoq; vt supra dicebamus; notatis enim figuris numeri 405, vt superiùs fuit explicatum, deinde supra primam figuram 4, ponatur prima lateris figura, quam esse dicemus 1, non enim potest esse 2; siquidem quadratum eius 4, subtractum ex 4, relinqueret 0, & hinc deinde non potest fieri subtractio, vt opus est, erit itaq; 1, eius quadratum, subtrahatur ex 4, residuum erit 3, scribatur sub 4, & apponatur ei secunda figura superior 0, itaut fiat numerus 30, ab hoc subtrahatur productum ex 12, numero radicum in 1, primam figuram, & residuum erit 18, cui apponatur superior figura 5, postrema in numero 405, vt fiat numerus 185 hic diuidendus est, vt quotiens exhibeat secũdam figuram.

		1 5
	1 Q ✱ 12 R ⊐	4 0 5
		· ·
		3 0
		1 2
2		
1 2		1 8 5
		1 0
3 2 Diuisor.		
		8 5
		6 0
		2 5
		2 5
		0 0

Diuisor qua arte indagetur.

Diuisor autem sic inuestigatur, duplicetur prima figura 1, & duplo 2, addatur 12, numerus radicum (quod fieri debet sic, vt numerum 2, numerus 12, vnica nota antecedat versus dextram, itaut 1, cadat sub 2,) quo

facto

facto prouenit numerus 32, & per hunc diuidatur numerus 185, & fiet quotiens 5, & ponatur supra 5, postremam notam numeri 405, postea verò duplicetur 1, prima figura, cuius duplum 2, ducatur in 5, secundam figuram inuentam, & fiet productum 10, quo subtracto à 185, ordine contrario, incipiendo nimirum à leua versus dextram, & remanebit numerus 85, à quo subtrahatur numerus 60, & productus ex 5, secunda figura in 12, numerum radicum, fiet residuum 25, à quo si subtrahatur 25, quadratum secundæ figuræ nihil remanebit, ergo 1 R, pretium dicemus esse 15.

Placet aliud exemplum afferre, in quo quadratum affirmatè afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine.

Paradigma aliud.

Coefficiens longitudo.		1 0		Sublateralis.
		.	. .	Tot puncta lateralia, quot quadratica.
	1 1	0 8	6 4	
	.	R .	R .	Puncta quadratica.
	Q I	Q II	Q III	
Plana ablatitia	9			Quadratum lateris primi.
		3 0		Planum à latere primo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum.	9	3 0		
Reliquum resoluendi quadrati affecti.	1	7 8	8	

o o o

R 3 2 8

Q 1 0 2 4: 6 4

Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior	Coefficiens longitudo.		1	0	
Reliquum resoluendi quadrati affecti.		2	7 8	6 4	
Diuisorũ pars inferior.	Duplum lateris primi.		6		
Summa diuisorum.			6 1	0	
Plana ablatitia		2	4		A latere secundo in duplum primi.
			4		Quadratum lateris secundi.
			2	0	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda.		1	2 6	0	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.			5 2	6 4	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius seu primi, & fit.

III. Eductio lateris singularis tertij tanquam secundi.

Coefficiens longitudo.		2 0	Sublateralis.
Reliquum resoluendi quadrati.	5 2	6 4	
Duplum lateris primi.	6	4	
Summa diuisorum	6	5 0	
Plana ablatitia	5 1	2	A latere secundo in duplum primi.
		6 4	Quadratum lateris secundi.
		8 0	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda aequalis reliquo resoluendi quadrati.	5 2	6 4	

Con-

Contingit non rarò figuras non esse tot, quot puncta; sint vno amplius; fit proinde tunc Deuolutio vt si foret æquatio huiusmodi 1 Q + 436 R = 11040. Deuolutio fieri debet, nempe parui facto primo puncto ad reliqua procedendum est, quemadmodum in adiuncto Paradigmate. *Quando figura non sunt tot quot puncta.*

Paradigma dum planum affectionis maius est quadrato.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo	4	3 6		Sublateralis.
		.	. .	Tot puncta lateralia quot quadratica.
	1	1 0	4 0	
	.	.	R.	Puncta quadratica.
	Q I	Q II	Q III	

Quoniam autem 4, maior est vnitate, ideo fit deuolutio.

II. Eductio lateris primi post deuolutionem.

Coefficiens longitudo	4 3	6	0 0 — R. 2 4, Q. 4 16		Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.
		. .			
	1 1 0	4 0			
	.	R.	Puncta quadratica.		
	Q I	Q I			
Plana auferenda	8 7	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.		
	4		Quadratum lateris primi.		
Summa planorum ablatitiorum.	9 1	2			
Reliquum resoluendi affectionis quadrati.	1 9	2 0			

Diuisorum pars inferior.	Coefficiens longitudo.	4	3 6	
Reliquum resoluendi afficientis Quadrati.		1 9	2 0	
Diuisorum pars inferior.	Duplum lateris primi.		4	
Summa diuisorum.		4	7 6	
Plana ablatitia		1 7	4 4	A latere secundo in coefficientem.
		2	8	A latere secundo in duplum primi.
			1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi afficientis quadrati.		1 9	2 0	

Demonstrari potest, vt supra.

S C H O L I O N.

Nota quid maximè obseruãdum.

ADuertendum est itaq; aliquando contingere, ex unica figura quæsitam radicem constare, etsi numeri duæ notæ punctis designentur; vt si sit æquatio 1 Q + 16 R = 225. Latus vnica constabit figura.

Si namq; primam figuram diceremus esse 1, eius quadrato subtracto ex 2, remaneret 1, non posset autem à reliquo numero fieri subtractio, vt opus est.

Sit æquatio 1 Q + 16 R = 225. Dicemus faciendam esse deuolutionem, de qua sermo quoq; redibit. Propterea pauci facto primo puncto, per deuolutionem ad secundum proceditur; Dicamus ergo latus esse 9, eius quadratum 81, si subtrahatur à 225, vt vides, remanet numerus 144, à quo subtracto 144, producto ex 9, latere in 16, numerum radicum, nihil remanet, erit ob id 1 R, pretium 9.

	9	
1 Q + 16 R =	2 2 5	16
	. .	9
	8 1	———
	———	1 4 4
	1 4 4	
	1 4 4	
	———	
	0 0 0	

Insuper illud etiam animaduertendum est methodos istas recentiorum, quæ nimirum generales sunt, non esse generales adeo, vt quæcunq; proposita æquatione, reperiatur radicis valor, quocunq; modo numerus contingat, siue nimirum radicis pretium sit numerus integer, vel fractus, rationalis, vel irrationalis, & numeri quibus æquatio explicatur sint integri, vel fracti, symmetri, vel asymmetri; pro his enim adhuc ars latet; aduersus autem asymmetriam, remedium aliquod extat, vt ex aduersus fractionis vitium, quemadmodum, tractantes de æquationum emendatione demonstrabimus.

Aduertendum circa recentiorũ methodum.

COROLLARIVM.

Ex superiùs dictis colligitur per hanc primam æquationem explicatam, nil aliud fieri, quàm inuestigare numerum, ad cuius quadratum si addatur productum ex quæsito numero in datum quempiam numerum, summa fit æqualis cuidam proposito numero, vt si proponatur quæstio.

Quid in hac prima æquatione composita fiat.

Numerum reperire, cuius quadratum, vna cum producto ex quæsito numero 10, æqualis sit numero 504.

Quæsitus numerus esto 1R, cuius quadratum est 1Q, cui addito 10R, producto ex dato numero 10, in numerum ignotum fit summa 1 Q + 10 R, & erit æquatio 1 Q + 10 R = 504. Cuius latus arte superiùs explicata reperies esse 18.

SCHO-

SCHOLION.

Modus reuocandi cōpositā æquationē haud ad simplicem.

Non erit abs re cum Bombellio aduertere modum reuocandi æquationem inter Q + R, & N, ad puram æquationem inter R, & N, fit autem hoc modo.

Sumatur latus quadrati, & ei addatur dimidium numeri radicum; & hoc quadratum erit æquale quadrato plus numero absoluto, plus quadrato dimidij numeri radicum.

Exempli gratia sit æquatio 1 Q + 10 R = 96, latus quadrati est 1 R, huic addatur 5, dimidium numeri radicum, & fit 1 R + 5, cuius quadratum est 1 Q + 10 R + 25, sed hoc esse debebat 1 Q + 10 R; proinde addantur 25, vtrobiq; & fit æquatio 1 Q + 10 R + 25 = 121 ergo & eorum latera æqualia erunt 1 R + 5 = 11, vtrinq; ablatis 5, remanebit æquatio 1 R = 6, & 6, erit 1 R valor.

Sit æquatio 1 Q + 8 R = 240, latus quadrati est 1 R, huic addito 4, dimidio numeri radicum fit 1 R + 4, cuius quadratum est 1 Q + 8 R + 16. Sed esse debebat 1 Q + 8 R, vtrobiq; addantur 16, fiet 1 Q + 8 R + 16 = 256: ergo, & horum latera æqualia erunt, scilicet 1 R + 4 = 16, vtrinq; ablatis 4, remanet 1 R = 12, & 12, est 1 R pretium.

Sit æquatio 1 Q + 4 R = 725, latus quadrati est 1 R, huic addito 2, dimidio numeri radicum fit 1 R + 2, cuius quadratum est 1 Q + 4 R + 4. Sed esse debebat 1 Q + 4 R; proinde vtrinq; additis 4, fiat æquatio 1 Q + 4 R + 4 = 729: ergo, & latera sunt æqualia 1 R + 2 = 27, vtrinq; ablatis 2, remanebit æquatio 1 R = 25, & 25 est 1 R pretium.

Cæterum huius æquationis reductio, ad puram fieri potest secundum artem Vietæ tractatu de emendatione æquationū Cap. 1. qua de re latè in Algebra speciosa loquemur.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter Q — R, & N.

Methodus Diophanti.

PRoducto ex numero quadratorum in numerum absolutum, addatur quadratum dimidij numeri radicum; & ab aggregato sumatur latus, cui si dimidium numeri radicum addatur, & summa diuidatur per numerum quadratorum: quotiens repræsentabit 1 R pretium, seu lateris quæsiti valorem. *Diophãteæ methodi explicatio.*

EXEMPLVM.

4 Q — 16 R = 660.

4	*Numerus Quadratorum*	*Multiplica.*
660	*Numerus absolutus*	
2640	*Productum*	*Adde.*
64	*Quadratum dimidij numeri Radicum*	
2704	*Aggregatum.*	
52	*Aggregati latus*	*Adde.*
8	*Dimidium numeri Radicum*	
60	*Summa.*	
4	*Diuisor.*	
15	*Valor lateris, seu 1 R pretium.*	

Et hæc præcepta intelligi possunt, etiam de numeris surdis, seu irrationalibus, quando nimirum occurrunt in extractione radicis. Sit æquatio *Quãdo occurrũt numeri irrationales.*

4 Q

$4Q - 12R = 600.$

4 *Numerus Quadratorum* } *Multiplica.*
600 *Numerus absolutus*

2400 *Productum* } *Adde.*
36 *Quadratum dimidij numeri Radicum*

2436 *Aggregatum.*
℞ 2436 *Aggregati latus* } *Adde.*
6 *Dimidium numeri Radicum*

℞ 2436 + 6. *Summa.*
4 *Diuisor.*
℞ 152 + 1 *Radicis valor.*

Eodem modo procedendum in omnibus æquationibus, in quibus numeri irrationales occurrunt.

Methodus Communis Antiquorum.

Huius methodi præcepta.

QVadrato dimidij numeri radicum addatur numerus absolutus, nam si aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, summa lateris valorem exhibebit.

EXEMPLVM.

$1Q - 4R = 165.$

2 *Dimidium numeri Radicum.*
4 *Eius quadratum* } *Adde.*
165 *Numerus absolutus*

169 *Aggregatum.*

13 *Aggregati latus* } *Adde.*
2 *Numeri radicum dimidium*

15 *Lateris valor, seu 1 R pretium.*

EXEM-

EXEMPLVM.

1 Q — 3 R = 150.

$1\frac{1}{2}$	*Dimidium numeri Radicum.*	
$2\frac{1}{4}$	*Eius quadratum*	*Adde.*
150	*Numerus absolutus*	
$152\frac{1}{4}$	*Aggregatum.*	
℞ $152\frac{1}{4}$	*Aggregati latus*	*Adde.*
$1\frac{1}{2}$	*Dimidium numeri Radicum*	
℞ $152\frac{1}{4}$ + $1\frac{1}{2}$	*Lateris valor, seu 1 R pretium.*	

Nec dissimili modo in alijs casibus procedendum.

SCHOLION.

SI verò comparationis homogeneum foret aliquod Binomium, vel residuum, vt si sit.

EXEMPLVM.

4 Q — 24 R = 2512 — ℞ 361728.

4	*Numerus quadratorum*	*Multiplica.*
2512 — ℞ 361728	*Numerus absolutus*	
10048 — ℞ 2170368	*Productum*	*Adde.*
144	*Quadratũ dimidij numeri radicũ*	
10192 — ℞ 2170368	*Aggregatum.*	
℞ 10048 — 12	*Aggregati latus*	*Adde.*
12	*Dimidium numeri radicum*	
℞ 10048	*Summa.*	
4	*Diuisor numerus quadratorum.*	
℞ 628	*Quotiens, & 1 R valor.*	

Iuxta methodum communem antiquorum.

 EXEM-

EXEMPLVM.

1 Q — 6 R $=$ 628 — ℞ 22608.

3 *Dimidium numeri Radicum.*

9 *Eius quadratum* } *Adde.*

628 — ℞ 22608 *Comparationis homogeneum*

637 — ℞ 22608 *Aggregatum.*

℞ 628 — 3 *Aggregati latus* } *Adde.*

3 *Dimidium numeri Radicum*

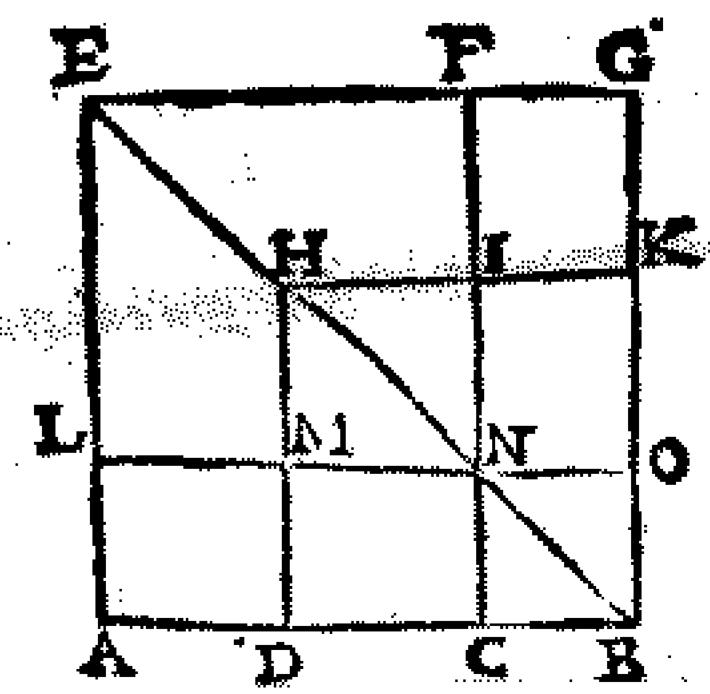
℞ 628 *Lateris valor.*

Et sic in omnibus casibus consimilibus procedendum erit.

DEMONSTRATIO.

Demõstratio superioris methodi.

ESto A B, pretium lateris quæsiti & sit AC, numerus radicum (erit enim minor, quàm AB, cum æquatio sit inter Q — R, & N.) Describatur supra AB, quadratum ABGE, secetur AC, in D, bifariam; agatur diameter BE, ducaturq; recta D H, parallela ipsi A E, secans B E, in puncto H, per quod agatur HK, parallela ipsi BG, secans BE, in N, & HK in I; deinde per punctum N, ducatur OL, parallela ipsi AB, secãs DH, in M, erunt [a] DK, MI, CO, quadrata. Cum autem rectangulum A F, comprehendatur sub A E, radicis pretio, seu latere quæsito (sunt enim AE, AB, latera æqualia) & AC, radicum numero, erit AF, radicum omnium pretium. Sed quia quadratum ABGE, hoc



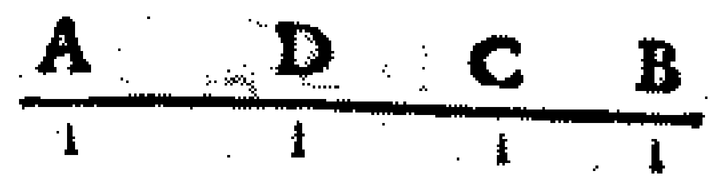
a Corol. prop. 4. lib. 2.

hoc est, quadratum ignotum, minus radicum pretio, æquale est numero cuidam absoluto (est enim æquatio 1 Q — R $\sqsubset$ N,) & quadratum idem ABGE, æquale est rectangulis AF, CG, seu quadratum ipsum minus rectangulo AF, radicum pretio æquale est rectangulo CG, erit rectangulum CG, numero absoluto, seu comparationis homogeneo æquale. Cum autem AM, DN, sint [b] æqualia quemadmodum sunt [d] DN, NK, erunt etiam æqualia duo AM, NK; addatur commune DO, fiet rectangulum AO, æquale gnomoni MBI, ergo, & eidem gnomoni æqualis erit numerus absolutus; cum CG, numerus absolutus, & AO, cui æquatur gnomon MBI, sint æqualia (nam AN, NG, sunt æqualia, quare addito, communi CO, erunt æqualia AO, CG,) si verò gnomon, seu numerus absolutus, addatur MI, quadrato dimidij numeri radicum, nempe segmenti DC, notum erit quadratum DK; atq; adeo latus eius DB, huic verò addito AD, dimidio numeri radicum fit notum AB, latus quæsitum, seu radicis valor; Rectè ergo regula iubet, quadrato dimidij numeri radicum, vt addatur, numerus absolutus, &c.

b 36. primi.
d 43. eiusdem.

Demonstratio alia eiusdem methodi.

Aliter ijsdem positis. Quoniam AC, est numerus radicum, & AB, radix quæsita, erit rectangulum BAC, estimatio omnium radicum (vt sæpè dictum est) at verò quadratum totius AB, minùs rectangulo BAC, omnium radicum pretio, æquale ponitur cuidam numero absoluto (est enim æquatio 1 Q — R $\sqsubset$ N,) ergo rectangulum ABC, erit æquale numero absoluto, siquidem quadratum, ex AB, minus rectangulo BAC, æquale est rectangulo ABC; sed quia AC, secta est bifariam in D, & in directum ei addita CB, rectangulum ABC, vna cum quadrato DC, dimidij numeri radicum æquale erit [a] quadrato ex DB; itaut rectangulo ABC, nempe numero absoluto addito ad quadratum dimidij numeri radicum fiat notum quadratum ex DB; at huic si addatur AD, dimidium numeri radicum, fit nota AB, ra-



a 6. secundi.

dix quæsita: ergo si ad quadratum dimidij numeri radicum addatur numerus absolutus fit quadratum ad cuius latus, addito dimidio numeri radicum, habetur radicis pretium, quod oportebat ostendere.

Methodus Petri Nonij.

Huius methodi præcepta.

QVadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & aggregati lateri addatur numerus radicum; summæ enim dimidium quæsiti lateris valorem repræsentabit.

EXEMPLVM.

1 *Q* — 4 *R* == 1 6 5.

1 6	*Quadratum numeri Radicum.*	*Adde.*
6 6 0	*Quadruplum numeri absoluti.*	
6 7 6	*Aggregatum.*	
2 6	*Aggregati latus*	*Adde.*
4	*Radicum numerus*	
3 0	*Summa.*	
1 5	*Dimidium summæ, & lateris valor.*	

Et eadem præcepta applicari possunt numeris irrationalibus.

DEMONSTRATIO.

Superioris methodi demonstratio.

ESto AB, latus ignotum, & AC, radicum numerus; atq; AB, intelligatur producta vsq; ad E, ita tamen, vt BD, sit æqualis ipsi CB, & DE, ipsi AC, quoniam AB, secta est vtcunq; in C, erit [a] quadratum ex AB, descriptum æquale rectangulis BAC, ABC, seu quadratum idem, minus rectangu-

a 2. secũdi.

A C B D E

lo

lo BAC, æquale erit rectangulo ABC, sed rectangulum BAC, quod comprehenditur sub AB, radicis pretio, & AC, radicum numero, est radicum omnium pretium (numerus enim radicum ductus in radicis pretium facit omnium radicum valorem) & quia quadratum ex AB minus rectangulo BAC, radicum pretio ponitur æquale cuidam numero absoluto noto, cum sit Q — R ⊐ N: ergo rectangulum ABC, erit numero absoluto æquale; si quidem quadratum ipsius AB, minus rectangulo BAC, æquale est rectangulo ABC; cum autem adiecta sit BD, æqualis ipsi CB, erit b quadratum ex AD, descriptum æquale quadruplo rectangulo ABC, vna cum quadrato segmenti AC, numeri radicum; itaut ad quadratum ipsius AC, numeri radicum, addito quadruplo numeri absoluti, nempe rectanguli ABC, fiat quadratum notum, cuius latus est AD; at huic si addatur segmentum DE; quod fecimus æquale noto segmento AC, nempe numero radicum, fiet nota tota recta AE, cuius dimidium est AB, latus quæsitum. Rectè igitur regula iubet, vt ad quadratum numeri radicum addatur numeri absoluti quadruplum, &c. Quod oportebat ostendere, &c.

b 8. secũdi.

Methodus peculiaris Vieta.

Peculiaris methodus explicatur.

SVmatur numerus, cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & ille statuatur medium latus ex tribus proportionalibus; extremorum differentia sit radicum numerus, his positis reperiantur extrema latera, maius enim ex ipsis radicis quæsitæ pretium repræsentabit.

Sit æquatio vt supra.

1 Q — 4 R ⊐ 165.

Exemplo declarãtur precepta iã tradita.

Latus quadratum numeri 165, est ℞ 165, & hoc sit medium ex tribus proportionalibus lateribus, & extremorum differentia sit 4, numerus radicum. Quoniam autem extrema latera, sunt quemadmodum latera rectanguli, & medij quadratum est ipsum rectangulum sub lateribus;

debe-

debemus dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum repetire latera; ſed quadratum differentiæ laterum additum quadruplo rectangulo ſub lateribus æquale eſt quadrato aggregati laterum; vt oſtendimus in noſtrorum Problematum reſolutionibus; proinde ſit laterum aggregatum 1 R; ergo erit æquatio 1 Q ⊐ 676; ergo 1 R ⊐ 26, erit ergo laterum aggregatum 26, data autem differentia, & aggregato laterum reperiuntur latera, facili negotio, vt ibidem oſtendimus. Nempe ad dimidium aggregati addatur dimidium differentiæ, & erit radicis quæſitæ valor 15, vt ſupra.

DEMONSTRATIO.

Demõſtratio in ſpecioſa Algebram differtur.

QVoniam methodus hæc repetenda eſt in Algebra ſpecioſa; proinde eo recurrendum eſt, vt eius demonſtratio habeatur.

Methodus Steuini.

Methodus Steuini traditur.

SVmantur numeri quicunq; qui quidem opportuni credantur; & in his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec quæſitus numerus reperiatur.

EXEMPLVM.

1 Q — 4 R ⊐ 165.

Exemplo declaratur ſuperior doctrina.

Fingo numerum quæſitum eſſe exempli gratia 10, ergo 4 R, valebunt 40, & 1 Q, valebit 100, ablatis 4, a 100, remanebit numerus 60; & erit æquatio 60 ⊐ 165, quod eſt falſum, vt patet, & ita concluſum cum ſit latus, maius eſſe, quam 10, in reliquis maioribus numeris procedẽdum eſt, donec numerus quæſitus occurrat, nempe 15.

Methodus Coigneti.

REperiantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & in his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec occurrat pars quæſita Problemati ſatisfaciens. *Declaratur methodus Coigneti.*

EXEMPLVM.

$$1\,Q - 4\,R = 165.$$

Partes aliquotæ ſunt 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165, procedatur autem vt ſupra, &c.

Methodus Girardi.

SVmantur partes aliquotæ numeri abſoluti, & ſic ipſæ ordinentur, ac diſponantur, vt binæ contra ſe poſitæ per multiplicationem efficiãt numerum ipſum abſolutum; poſtea diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum, cuius æquationis ſenſus erit. Si numerus radicum addatur vni ex partibus aliquotis numeri abſoluti, conſtituetur valor radicis quæſitæ. Ea verò pars eligi debet aliquota, cui ſi addatur radicum numerus, fiat altera coefficiẽs correlata. *Girardi methodus explicatur.*

EXEMPLVM.

$$1\,Q = 4\,R + 165.$$

Hæc æquatio ad hanc reuocabitur $1\,R = 4 + \frac{165}{1\,R}$ *Exemplum ad ſuperiorem methodum illuſtrandam.*

ſi nimirum omnia diuidantur per 1 R, ex partibus aliquotis autem eligatur illa, cui additis 4, fiat altera coefficiens correlata, & reperietur eam eſſe 11, nam additis 4, fit ſumma 15, nempe altera pars coefficiens correlata; proinde 15, dicebamus eſſe 1R, pretium.

1 —	165
3 —	55
5 —	33
11 —	15

Me-

Methodus generalis Vietæ.

Generalis methodus Vietæ ä traditur.

EDato in numeris quadrato affecto mulcta plani sub latere, & data coefficiente longitudine latus analyticè elicere.

Proponatur 1 Q — 8 R = 58548. Quæritur quanta sit magnitudo 1R; vt igitur latus eruatur ex 58548, negatè affecto, idem obseruandus erit processus, qui in analysi quadrati affirmatè affecti; hoc vno addito, vt in diuisionibus attendatur ipsius coefficientis, & regularium in puro quadrato diuisorũ differentia; sicut in affecto quadrato affirmatè attendebatur summa: excessus autem est penes diuisores inferiores, vt ex adiuncto Paradigmate constabit.

Cum autem elicita singularia latera ducentur in coefficientem planum, quod inde fit, desinens sub sede coefficientis, quod alioquin subtrahendum erat, addetur proposito negatè affecto quadrato.

Paradigma analyseos Quadrati affecti sub latere negatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.		8		Sublateralis.
		·	· ·	Tot lateralia puncta quot quadratica. 0 0 0 / R. 2 4 6 / Q. [illegible] 36. Tot numerales circuli quot puncta quadratica, lateraue singularia.
Quadratum affectum resoluendum.	5	8 5	4 8	
		·	·	
	Q I	Q II	Q III	
Plana — Ablatitium	4			Quadratum lateris primi.
Plana — Additiium		1 6		A latere primo in Coefficientem.
	3	8 4		
	2	0 1	4 8	

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorū pars superior. { Coefficiens longitudo.			8	
Reliquum resoluendi quadrati.	2	0 1	4 8	
Diuisorū pars inferior. { Duplum lateris primi.		4		
Excessus diuisorum inferiorum.		3 9	2	
Plana ablatitia {	1	6	4	A latere secundo in duplum primi.
		1 6		Quadratum lateris secundi.
Excessus planorum.		2 5	4	
Planum addititium.		3	2	A latere secundo in coefficientem.
Reliquū resoluendi quadrati		2 8	6 8	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, seu primi, & fit.

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens. longitudo.		8	
Reliquum resoluendi quadrati.	2 8	6 8	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	4	8	
Excessus diuisorum.	4	7 2	
	2 8	8	A latere secundo in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
	2 9	1 6	
Planum ablatitium.		4 8	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum æqualis reliquo resoluendo quadrato.	2 8	6 8	

Breuiori modo explicatur æquatio.

Hæc eadem æquatio breuiùs explicari poteſt methodo ſuperiùs inſinuata. Signatione facta per puncta iuxta leges numeri quadrati, &c. extrahatur latus quadratum numeri, vſq; ad primum punctum à ſiniſtris, cumq; numerus

2 4 6	
1 Q — 8 R ═ 5 8 5 4 6 8	4 0 0
	8
4	3 9 2 Diuiſor primus.
1 8 5	
1 6	4 8 0
	8
2 0 1 4	4 7 2 Diuiſor ſecundus.
3 2	
2 0 4 6	
1 6	
4 4 6	
1 6	
2 8 6 8	
4 8	
2 9 1 6	
2 8 8	
3 6	
3 6	
0 0	

modo occurrens, ad primum illud punctum ſit 5, eius latus quadratum ſit 2, ſcribatur 2, numerus ſupra 5, eius autem quadratum 4, poſitum ſub 5, auferatur ex 5, remanet 1, cui

cui annectantur duæ ſequentes figuræ 8, & 5, vt fiat 185, ſcribatur ſub 185, numerus 16, factus ex multiplicatione 8, numeri radicum per 2, primum latus, fiet ſumma 201, cui annectatur ſequens figura 4, vt fiat 2014.

Ad indagandam ſecundam figuram, ſiue ſecundum latus ſingulare, parandus eſt diuiſor hoc modo. Sumatur 4, duplum primi lateris, cui intelligantur annexæ duæ cifre 00, ſubtrahatur 8, numerus radicum, vt remaneat 392, per quem diuiſo 2014, fiat quotiens 4, & ſecundum latus, quod ductum in 8, numerum radicum, producit numerum 32, qui additus numero 2014, facit 2046, ſub hoc numero ſcribatur 16, productum à 4, latere ſecundo in 4, duplum lateris primi; ſcribi tamen debet, vt in ſuprapoſito diagrammate vides; & remanebit 446, ſubſcribatur 16, quadratum lateris ſecundi, vt vides, facta ſubtractione, remanet numerus 28, cui intelligantur annexæ, ſequentes duæ figuræ 6, & 8, vt fiat numerus 2868, ſub hoc autem ſcribatur 48, productum à 6, tertia figura in 8, numerum radicum; & facta additione habetur 2916. Paretur modo diuiſor ad indagandam tertiam figuram, quemadmodum vides; nempe intelligatur addi 0, duplo primi lateris 24, nempe ipſi 48, vt fiat 480, à quo ſubtrahi intelligatur 8, numerus radicum, vt remaneat 472, fit quotiens inſtituta diuiſione 6, modo ducatur 6, in 48; duplum lateris primi, & fit 288, numerus, qui ſubductus ex 2916, ad eum tamen modum, quo factum vides, & remanebit 36; à quo ſubtracto 36, quadrato ipſius 6, ſecundæ figuræ, & remanet 0, &c.

Secunda figura indagatio.

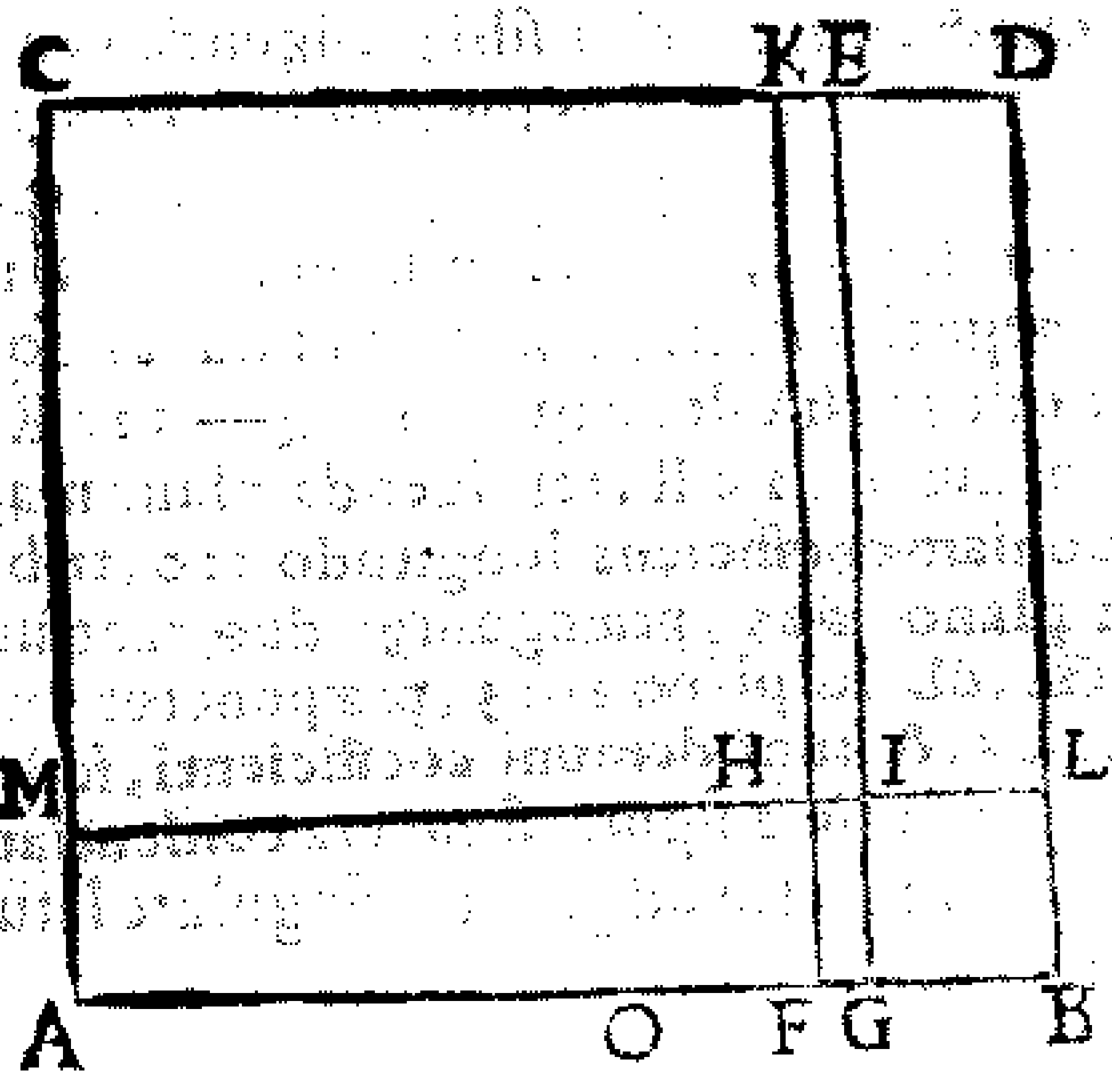
Vt autem hanc methodum Geometricè demonſtremus; placet facilitatis gratia, huius æquationis analyſin inſtituere; nempè ſit 1 Q — 8 R ⌶ 468; cuius radix duabus tantummodo figuris conſtat. Sumatur latus quadratum ex 4, figura notata primo puncto, & eſt 2, cuius quadratum eſt 4; Sumatur planum factum ab 8, numero radicum in 2, primam figuram, & eſt 16; cum autem 2, prima figura ſignificet 20, (eſt enim numerus modo denariorum) erit igitur 16, significans 160, quamobrem non immeritò scribitur in eo situ, vt vides; additus autem 160, ad 468, facit 628, à quo subtracto 400, quadrato ex 20, remanet 228; vel quod idem est subtracto 160, ex 400, remanet 240, quo subducto ex 468, remanet 228, modo ad habendam secũdam figuram, sumatur duplum primæ 2, nempe 4, & scribatur in eo situ, vt significet 40, quoniam 2, dicebat 20, & ideo non casu ponitur sub penultima figura, vt in Paradigmate vides; modo ex 40, dupla primi lateris 20, auferatur 8, numerus radicum, & remanet 32, per quem oportet diuidere 228, sitq; quotiens 6, ex 228, subtrahamus planum à latere secundo, in duplum primi, vna cum quadrato lateris secundi 6, nempe 36, & nihil remanet.

Coefficiens		8 .
1Q — 8R ═	4	6 8
	4	
	1	6
	2	4 0
	2	2 8
		8 .
	2	2 8 .
		4
		3 2
	{ 2	4
		3 6
	2	7 6
		4 8
	2	2 8

Superioris methodi demonstratio. Demonstratio sic se habet. Sit radix quæsita AB, nempe 26, sitq; eius quadratum ACDB, sit autem AG, 20, & GB, sit 6, perficiatur figura, vt vides; sit autem FB, vel KD, coefficiens longitudo, itaut KB, sit planum sub coefficiente, & quæsita radice; quamobrem AK, erit homogeneum comparationis; est enim æquatio Q — R ═ N. Ad hoc autem si addatur KL, planum sub coefficiente, & primo

late-

latere singulari, fiet planum FAC, DLHF, à quo dempto ME, quadrato ex primo late.e, remanebit MF, & ID, sunt autem hæc plana eiusdem altitudinis; longitudo autem vnius est primi lateris DL, alterius est vniuersalis lateris AB, minus coefficiente longitudine FB, ac proinde est AF, si hæc duo rectangula in directum constituantur, rectangulum fiet, cuius longitudo erit DL, plus AF, altitudo verò erit secundum latus quæsitum, seu quod idem est; longitudo erit duplum ipsius DL, vel AG, minus FB, coefficiente plus GB, latere secundo quæsito; adeo vt constet ex



DL, & AO, plus OF; pono enim OG, æqualem FB, atq; adeo OF, ęqualis erit GB; Itaq; rectangulum hoc cum contineatur sub DL, plus AO, plus OF, nempe sub duplo primi lateris, minus data coefficiente plus secundo latere quęsito, & ipso latere secundo quæsito GB, si planum æquale illis duobus AH, ID, applicemus ad magnitudinem ęqualem duplo primi lateris, minus coefficiente longitudine, hoc est DL, plus AD, orietur secundum latus quæsitum OF, seu GB, si pro quotiente sumatur id quod satisfacit

quæ-

quæstioni; nempe vt sui quadratum sit æquale ei, quod superest ex applicatione, vt methodus præcipit analyseos exigente id natura. Sæpesæpiùs autem contingit, vt coefficiens longitudo, pluribus abundet singulis figuris, quàm quadratum negatè affectum binis, puncta enim conditionaria in hac æquatione cadunt in singulis figuris. Hoc autem argumentum est planum coefficiens maius esse resoluendo affecto negatè quadrato. Huiusmodi verò quadratum Acephalum appellatur. Vt igitur sit locus diuisioni, siue vt possit diuisio institui præponetur mutilo proposito quadrato ea numeralium circulorum multitudo, vt illud tot puncta quadratica sibi prefigenda vendicet, quot simplices figuras coefficiens longitudo. Prima verò coefficientis longitudinis figura pergendo à læua ad dextram constituetur latus singulare primum ipsius resoluendi quadrati negatè affecti, non immutata alioquin explicata methodo; vt si esset æquatio. Q — 320 R = 1625; maius est planum 320 R, resoluenda plana magnitudine 1625; quoniam coefficiens longitudo 320, tribus constat figuris at plano 1625, præfiguntur duo tantum quadratica puncta, ob id plano 1625, præponetur vnus numeralis circulus, & tunc demum coefficienti, sedes adijcietur, ipsius verò prima figura, si cætera consentiant, vel proximè maior, assumetur ad primum singulare latus quadrati propositi mutili.

Para-

Paradigma analyseos acephali Quadrati

I. Eductio lateris primi.

Coefficiens longitudo	3	2 0		Sublateralis.
		·	· ·	
Quadratum resoluendum acephalum.	0	1 6	2 5	
	·	R.	R.	
Plana prosphaerica. Ablatitium	9			Quadratum lateris primi.
Plana prosphaerica. Addititium	9	6 0		A latere primo in coefficientem longitudinem.
Excessus addititij.		6 0		
Reliquum restituti mutili quadrati.		7 6	2 5	

0
R 3 . 2
Q 9 .

II. Eductio lateris secundi.

Diuisorũ pars superior. Coefficiens		3 2	0	
			· ·	
Reliquum restituti resoluendi mutili quadrati.		7 6	2 5	
		·	·	
Diuisorũ pars inferior. Duplum lateris primi.		6		
Excessus diuisorum inferiorum.		2 8		
Plana ablatitia.	2	2		A latere secundo in duplum primi.
		4		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	2	2 4		
Planum addititium		6 4	0	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus ablatitiorum.		6 0		
		1 6	2 5	

Iam duo prima latera funguntur vice vnius primi, & fit.

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij.

Diuisorũ pars superior. { Coefficiens	2	2 0	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.	1 6	2 5	
Diuisorũ pars inferior. { Duplum lateris primi.	6	0	
Excessus diuisorum inferiorum.	3	2 0	
Plana ablatitia {	3 2	0	A latere secundo in duplum primi.
		2 5	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	3 2	2 5	
Planum additititium	1 6	0 0	A latere secundo in coefficientem.
Excessus addititij æqualis reliquo resoluendo quadrato.	1 6	2 5	

0 0 0

R. 3 2 5

Q. 9 1 4: 2 5

Propositæ æquationis figuræ signentur, modo, & ordine superius præscripto, &c. Deinde supra notas designatas punctis ponendus est numerus, cuius quadratum sit æquale numero, qui fit ex ductu numeri positi, in numerum radicum, &c. meliùs res ipsa exemplis intelligetur.

EXEM-

EXEMPLVM.

Sit æquatio 1 Q — 6 R = 27 (9)

2	7
5	4
8	1
8	1
0	0

Quæsitus numerus esto 9: ducatur in 6, numerum radicum, & producentur 54; quibus additis ad 27, fit summa 81: si modo auferamus hanc summam ab 81, quadrato quæsiti numeri, & radicis, nihil remanebit: ergo 1R, pretium erit 9.

At verò si latus duabus figuris cõstaret, longiorem praxim requireret. Sit æquatio 1 Q — 8 R = 425. Latus quadrati primæ figuræ ad sinistram puncto notatæ est 2; cuius quadratum 4, si abs 4, auferatur, remanebit 0: sub 4, prima figura puncto notata scribatur numerus 4, quem dicebamus esse quadratum subtractum, &c. prope 0, notetur 2, figura post 4, numeri 425; & exempli formula stabit hoc modo 02. huic addatur numerus productus ex ductu primæ figuræ inuẽtę 2, in numerum radicũ 8; addatur inquam eo quòd numero radicum præfigitur signum —: numerus itaq; addendus erit 16; nam 8, in 2, faciunt 16: factaq; additione, erit aggregatum

Quãdo latus duabus figuris constat.

1 Q — 8 R = 4 2 5 (2 5)

4	2	5
4		
0	2	
1	6	
1	8	5
	4	0
2	2	5
2	0	
	2	5
	2	5
	0	0

tum

tum 18: apponatur ei postrema figura numeri 425, nempè 5, (dico postremam, quoniam propriùs nunc vsurpatur ea, quæ est primo loco ad sinistram) & fiet numerus 185.

Vt autem secundam figuram habeamus, duplicare debemus 2, primam figuram, cuius duplum est 4: nunc absq; subtrahere debemus 8, numerum radicum; hoc tamen pacto, vt 8, figura scribatur sub 4, non ad vnguem, sed ante, ac loco vnius figuræ versus dextram, itaut cadat adamussim sub o (si hæc nota intelligatur, vt intelligi debet annexa ipsi figuræ 4) & facta subtractione fit residuum 32; & hac arte reperietur diuisor, cuius beneficio, secunda inquiritur lateris figura. Itaq; 23, erit secunda figura; numerus verò diuidendus est ille superiùs seruatus, nempè 185: factaq; diuisione, prosilit in quotiente 5, secunda figura scribenda supra 5, notam postremam numeri 425: ducatur 8, numerus radicum in 5, secundam figuram inuentam; & numerus, qui producitur nempe 14, addatur ipsi numero 185, & fiet summa 225: à qua subtrahatur productum ex 4, duplo primæ figuræ 2, in 5, secundam figuram, nempe 20; factaq; subtractione initio ducto à sinistris, vt vides, remanent 2: quibus annectatur postrema nota 5, & fiet numerus 25; à quo subtrahi debet idem 25, nempe quadratum numeri 5, secundæ figuræ: ergo 1 R pretium erit 25, &c.

Quando quadratũ affectũ tot binis figuris constat, quot coefficiens longitudo singulis.

Quod si negatè affectum quadratum, de cuius resolutione agitur, tot binis figuris constet, quot coefficiens longitudo singulis: aliquando eò prorumpit coefficiens; vt nisi Analysta cautè procedat, eiusq; rationem habeat, deludatur non rarò in exquirenda radice. Præstat ob id tali casu intelligere propositũ negatè affectum quadratum, adauctum quadrato ipsius coefficientis longitudinis; ex eo verò sic adaucto latus eliciatur, quod erit, vel consentaneum, vel consentaneo proximè minus: vt si pro-

$$
\begin{array}{r}
1Q - 60R = 1600 \\
3600 \\
\hline
5200
\end{array}
$$

proposita foret æquatio 1 Q — 60 R = 1600, ordinatis figuris, staret æquatio hunc in modum. Quoniam quadratum autem ex 60, adiunctum numero 1600, facit 5200, & latere numeri 52, proximè maius est 8; ob id latus 8, assumetur pro primo latere quæsitæ radicis, radix enim ipsa erit 80.

COROLLARIVM.

EX hactenus explicatis, colligitur per hanc æquationem nil aliud quæri, quàm numerum, à cuius quadrato, si subtrahatur productum ex numero quæsito in datum aliquem numerum, remaneat alter, statutus scilicet numerus: vt si proponatur,

Numerum reperire, à cuius quadrato, si auferatur numerus, qui producitur ex multiplicatione 8, in quæsitum numerum, remaneat numerus 425.

Quæsitus numerus esto 1 R, cuius quadratum erit 1 Q, à quo detractis 8 R, fit residuum 1 Q — 8 R, & erit æquatio 1 Q — 8 R = 425.

S C H O L I O N.

PRætereundum non est, quod aduertit Bombellus; nimirum hanc æquationem inter Q — R, & N, ad simplicem æquationem reduci posse inter R, & N, hoc modo. Sumatur radix ipsius quadrati, nempe 1 R, & ex hoc auferatur dimidium numeri radicum, & in nostro exemplo erit dimidium 4, & fiet summa 1 R — 4; huius residui quadratum est 1 Q — 8 R + 16. Sed esse debebat summa 1 Q — 8 R; proinde, vtrobiq; additis 16, fit 1 Q — 8 R + 16 = 441: ergo eorum latera æqualia erunt, nempe 1 Q — 4 = 21. Vtrinq; additis 4, fit æquatio 1 R = 25, & erit Radicis quæsitæ valor numerus 25, vt priùs. *Æquationis compositæ iam explicatæ ad simplicem reuocatio.*

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter R — Q, & N.

Methodus Diophanti.

Diophanti methodus explicatur.

A Quadrato dimidij numeri radicum subtrahatur productum ex numero quadratorum in numerum absolutum, & à residuo sumatur radix: hæc enim si addatur dimidio numeri radicum, vel ab eodem subtrahatur, atq; summa, vel residuum diuidatur per numerum quadratorum; quotiens radicis quæsitæ pretium exhibebit.

EXEMPLVM.

56 R — 4 Q ═ 192.

784 *Quadratum dimidij numeri radicum* } *Subtrahe.*
768 *Productum ex numero quadratorum in numerum absolutum* }

16 *Residuum.*
4 *Residui latus* } *Adde.*
28 *Dimidium numeri radicum* }

32 *Summa diuidenda.*
4 *Diuisor.*

8 *Quotiens, & valor lateris; nimirum lateris maioris.*

28 *Dimidium numeri radicum* } *Subtrahe.*
4 *Latus residui* }

24 *Residuum diuidendum.*
4 *Diuisor.*
6 *Quotiens, & lateris valor, nempe lateris minoris.*

Hæc

Hæc autem æquatio duplicem radicem habet, vt vidimus. Verùm quandoq; vtraq; quæstionem soluit; aliquando altera tantùm. Cæterum secundum hanc Diophanti methodum, quando numerus productus ex numero quadratorum in numerum absolutum, æqualis fuerit quadrato dimidij numeri radicum, vnicum est latus, videlicet, dimidium numeri radicum, &c. Si numerus autem absolutus fuerit maior quadrato dimidij numeri radicum, Problema, nonnisi sophisticè soluitur; non enim debet esse maior numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicum. Non dissimili modo procedendum erit, cum intercesserint numeri irrationales, in æquationis analysi.

Hæc æquatio duplicē habet radicem.

Quãdo numerus absolutus maior quadrato dimidij numeri radicum Problema, nonnisi sophysticè solui potest.

EXEMPLVM.

56 *R* — 4 *Q* = 164.

784 *Quadratum dimidij numeri radicū* } *Subtrahe.*
656 *Productum ex numero quadratorū in numerum absolutum*

128 *Residuum.*
℞ 128 *Residui latus* } *Adde.*
28 *Dimidium numeri radicum*

℞ 128 + 28 *Summa.*
4 *Diuisor.*

℞ 8 + 7 *Valor lateris, nimirum maioris.*

28 *Dimidium numeri radicum* } *Subtrahe.*
℞ 128 *Latus residui*

28 — ℞ 128 *Residuum.*
4 *Diuisor.*

7 — ℞ 8 *Lateris valor, nempe minoris,*

Me-

Methodus communis antiquorum.

Communis antiquorũ methodus declaratur.

A Quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus absolutus: etenim si radix quadrata residui addatur dimidio numeri radicum; vel ex hoc dimidio subtrahatur radix ipsa; duplex se afferre latus comperiemus.

EXEMPLVM PRIMVM.

$$14R - 1Q = 48.$$

Exemplum ad superiorem doctrinam explicandam.

7 *Dimidium numeri radicum.*

49 *Eius quadratum*
48 *Numerus absolutus* } *Subtrahe.*

1 *Residuum.*

1 *Latus residui*
7 *Dimidium numeri radicum* } *Adde.*

8 *Latus vnum, nempe latus maius.*

7 *Dimidium numeri radicum*
1 *Latus residui* } *Subtrahe.*

6 *Latus alterum, nempè latus minus.*

EXEM-

EXEMPLVM SECVNDVM.

$20R - 1Q = 96.$

10 *Dimidium numeri radicum.*

100 *Quadratum dimidij numeri radicum* } *Subtrahe.*
96 *Numerus absolutus*

4 *Residuum.*
2 *Latus residui* } *Adde.*
10 *Dimidium numeri radicum*

12 *Latus vnum, nempe latus maius.*

10 *Dimidium numeri radicum* } *Subtrahe.*
2 *Latus residui*

8 *Latus alterum, nempe latus minus.*

Animaduertendum verò, quando numerus absolutus fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, tunc vnicum fore latus; nempe dimidium ipsum numeri radicũ. *Nota.*

DEMONSTRATIO.

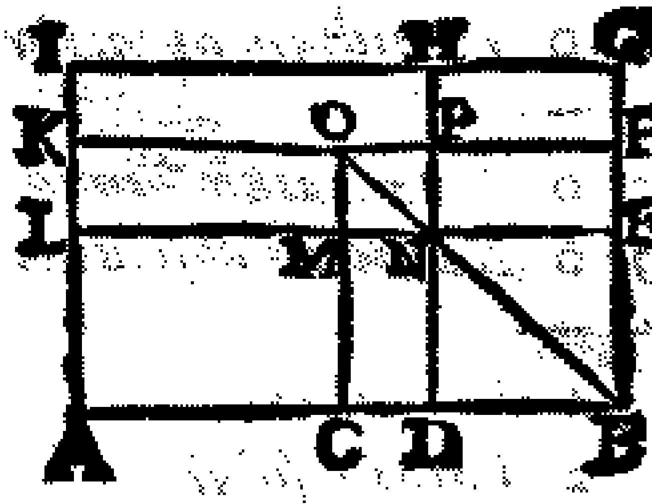
RAdicum numerus esto AB, quæ secetur [a] bifariam in C, & non bifariam in D: super partem maiorem AD describatur [b] quadratum ADHI; perficiaturq; rectangulum AG: postea supra BC, radicum numeri dimidio, describatur [b] quadratum BCOF; cuius ducta diameter BO, secet DH, in N, puncto; per quod agatur [c] LE, linea parallela ipsi AB, secans CO, in M; & producta FO, secet AI, in K, & DH, in P: erunt [d] DE, MP, quadrata; rectangulum verò AO, æquale erit [e] quadrato CF: siue quæsitum quadratum, quod datur, sit AH, siue DE, siue CF. Ostendam

a 10. *primi.*
b 46. *primi.*
b 46. *primi.*
c 31 *primi.*
d *coroll.* 4. *secundi.*
e 36. *primi.*

dam perpetuò, veram esse æquationem, nempe radices, minus quadrato æquari numero absoluto, &c. Datum sit

Primus casus.

quadratum quod quæritur AH; ergo rectangulum AG, comprehensum sub AI, latere quadrati, & numero radicum AB, omnium radicum valor, siue pretium erit. Dictum est enim supra ex ductu lateris, seu radicis in radicum numerum, fieri omnium radicum pretium. Cum autem pretium radicum AG, minus quadrato, nempe AH, æquale sit numero absoluto (est enim æquatio R — Q = N,) erit proinde DG, rectangulum æquale numero absoluto; sunt autem duo rectangula AN, DG, æqualia, cum sub æqualibus lateribus contineantur; rectangulum autem AN, æquale est gnomoni MBP; (siquidem complementa CN, NF, sunt æqualia; commune si addatur DE, erit CE, ipsi DF, æquale: sed CE, AM, sunt [1] æqualia; ob id DF, erit æquale ipsi AM; commune addatur CN, fiet AN, æquale gnomoni PBM;) ergo DG, nempe numerus absolutus, erit æqualis gnomoni PBM: at si ex CF, quadrato dimidij numeri radicum auferatur gnomon PBM; remanebit notum quadratum MP; cuius latus est MN, seu CD: addito autem CD, ipsi AC, dimidio numeri radicum fit notum AD, latus quadrati AH, quæsiti. Si itaq; ex quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus absolutus, & residui latus quadratum, addatur dimidio numeri radicum; fit notum latus quæsitum, quod oportebat ostendere.



[1] 36. primi.

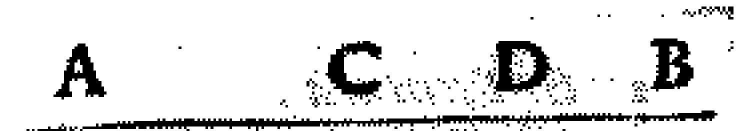
Secundus casus.

Secundo datum sit quadratum DE; iisdem positis, &c. erit rectangulum AE, contentum sub numero radicum AB, & latere quadrati BE, omnium radicum æstimatio; cum autem radicum valor AE, minus quadrato DE, æquale sit cuidam numero absoluto (est enim æquatio R — Q = N,)

$\sqsupset$ N,) & rectangulum AE, minus quadrato DE, æquale est rectangulo AN; erit ergo AN, rectangulum numero absoluto æquale; sed rectangulum AN, est æquale gnomoni PBM, vt supra ostendimus; proinde numerus absolutus, erit ipsi gnomoni PBM, æqualis; hoc autem ablato ex CF, quadrato dimidij numeri radicum, remanet notum MP, quadratum, cuius latus est CD, quo sublato, ex CB, dimidio numeri radicum, remanebit notum DB, latus quadrati quæsiti, quod erat ostendendum.

Tertiò sit datum quadratum CF, ergo rectangulum AF, contentum sub numero radicum AB, & latere BF, erit radicum omnium æstimatio; cum autem radicum valor, nempe AF, minus quadrato, nempe CF, æquale sit cuidam numero absoluto (est enim æquatio $R - Q \sqsupset N$,) & rectangulum AF, minus quadrato CF, æquale est rectangulo AO; erit ob id AO, æquale numero absoluto, ablato autem AO, ex CF, quadrato dimidij numeri radicum, nihil remanet; siquidem AO, CF, rectangula sunt æqualia; proinde nihil erit addendum dimidio numeri radicum; neq; subtrahendum, vt habeatur latus quæsitum: sed ipsum dimidium numeri radicum erit latus quæsitum, &c. Quod oportebat ostendere. *Tertius casus.*

Aliter breuiùs. Sit radicum numerus, vt priùs AB, cuius dimidium AC, vel CB, latus quæsitum AD; erit ergo rectangulum BAD, æquale pretio omnium radicum; cum numerus radicum ductus in radicis pretium, producat omnium radicum valorem; & quia rectangulum BAD, radicũ valor, minus quadrato AD, æquale est numero absoluto (est .n. æquatio $R - Q \sqsupset N$,) & rectangulum BAD, minus quadrato AD, æquale est rectangulo ADB; proinde rectangulum ADB, erit numero absoluto æquale. Sed quadratum, ex CB, dimidio numeri radicum æquale est [a], rectangulo BDA, vna cum quadrato ex CD; si subtrahatur ergo à quadrato ex CB, dimidio numeri radicum, rectan-



a 5. secũdi.

gulum ADB, scilicet numerus absolutus, remanebit notum quadratum, cuius latus est CD; quo addito ad dimidium AC, numeri radicum, fit notum latus quæsitum AD; & non dissimili modo procedetur in demonstrando, quando latus fuerit DB, vel demum CB, &c.

COROLLARIVM.

Quid ex hactenus explicatis colligẽdum sit.

Ex demonstratis colligitur in præsenti æquatione, si radix numeri, qui relinquitur ex numeri absoluti subtractione, à quadrato dimidij numeri radicum, addatur dimidio numero radicum, reperietur maior radix propositæ æquationi faciens satis.

Si verò eodem ex dimidio numeri radicum subtrahatur, emerget radix minor.

Demum patet si numerus absolutus fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, dimidium ipsum quæsitam exhibere radicem, &c.

Methodus Petri Nonij.

Explicatur methodus Petri Nonij.

A Quadrato numeri radicum, subtrahatur quadruplum numeri absoluti, & à residuo sumatur latus; quod quidem si addatur numero radicum, vel ab eodem subtrahatur, aggregati, vel residui dimidium, lateris valorem dabit.

EXEMPLVM.

14 *R* — 1 *Q* = 48.

196	*Quadratum numeri radicum*	*Subtrahe.*
192	*Quadruplum numeri absolutum*	
4	*Residuum.*	
2	*Latus residui*	*Adde.*
14	*Numerus radicum*	
16	*Summa.*	
8	*Dimidium summæ, & latus maius.*	
14	*Numerus radicum*	*Subtrahe.*
2	*Latus residui*	
12	*Residuum.*	
6	*Dimidium residui, & latus minus.*	

Cæte-

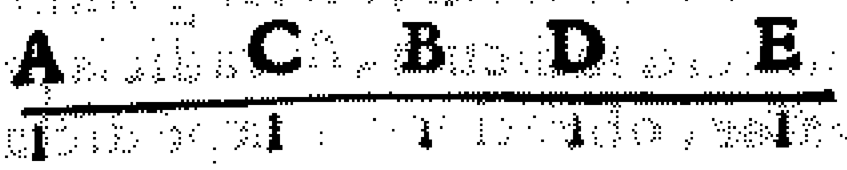
Cæterum quando numeri absoluti quadruplum fuerit æquale quadrato dimidij numeri radicum, vnicum erit latus, nempe ipsum dimidium numeri radicum.

Quando quadruplũ numeri absoluti æquale fuerit quadrato dimidij numeri radicum vnicũ est latus.

DEMONSTRATIO.

Methodus superiùs assignata demõstratur.

Radicum numerus esto AD, & quæsitum quadrati latus sit AB; sitq; primò maius dimidio numeri radicum; ergo rectangulum DAB, contentum sub latere quæsito, & numero radicum, erit radicum omnium pretium, ob rationem sæpè allatam; Cum autem sit æquatio $R - Q = N$. Si à rectangulo DAB radicum pretio, auferatur quadratum ex AB, residuum erit numerus absolutus; nimirum rectangulum ABC, seu ABD: sed quadratum ex AD, æquale est [a] quadruplo rectangulo ABC, vna cum quadrato ex AC; proinde & quadruplo numero absoluto, vna cum quadrato ex AC: itaq; si à noto quadrato ex AD, auferatur quadruplum rectanguli ABC; hoc est quadruplum numeri absoluti, remanebit quadratum notum, cuius latus est AC: huic, autem, vel illi æquali DE, si addatur AD, numerus radicum, fiet nota tota AE, quæ dupla est ipsius AB, lateris quæsiti.



a 6. secũdi.

Si verò latus quadrati BD, dimidio numeri radicum minus erit; proinde rectangulum contentum sub AD, DB, radicum erit omnium pretium. Si verò ex ADB, rectangulo dematur quadratum BD, remanebit rectangulum ABD, æquale numero absoluto (est enim æquatio $R - Q = N$.) At verò quadratum ipsius AD, est æquale quadruplo rectangulo ABD, vna cum quadrato AC; quare si à quadrato noto ipsius AD, auferatur notum quadruplum rectanguli ABD, hoc est quadruplum numeri absoluti, remanebit notum quadratum, cuius latus est AC: hoc autem si dematur ex AD, numero radicum, remanet CD, quæ dupla est lateris BD, &c. quod oportebat ostendere.

Secundus casus.

Tertius casus.

Demum si quadruplum numeri absoluti fuerit æquale quadrato numeri radicũ; ostendemus dimidium numeri radicum æquale esse lateri quæsito. Itaq; dico si quadruplum numeri absoluti, æquale fuerit quadrato numeri radicum, dimidium numeri radicum fore latus quadrati quæsiti.

Demõstratio quãdo numeri absoluti quadruplum æquale fuerit quadrato numeri radicũ dimidiũ numeri radicum fore latus.

Sit AC, latus quadrati, & AB, dupla ipsius AC, sit numerus radicum, rectangulum ABC, comprehensum sub numero radicum, & radicis pretio, erit omnium radicum valor, ob rationem sæpè dictam; & quoniam est æquatio inter R—Q, & N; erit proinde rectangulum ABC, minus quadrato ex AC, seu CB, æquale numero absoluto; sed rectangulum ABC, minus quadrato ex AC, vel CB, est alterutrum quadratorum ex AC, & CB; cum AC, CB, sint æquales: ergo alterutrum de quadratis ex AC, CB, erit æquale numero absoluto; & quia quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati AC, vel CB; ob id quadratum ex AB, erit quadruplum numeri absoluti; Subtracto autem quadrato ex AB, nempe quadruplo numeri absoluti, à quadrato AB; quadrato .f. numeri radicum, remanebit nihil: hoc autem addito ad AB, numerum radicum, vel subtracto ab eodem; nota remanet recta AB, radicum numerus, & est dupla lateris AC, quæsiti. Rectè igitur regula iubet, &c.

Methodus peculiaris Vietæ.

Peculiaris methodus Vietæ.

SVmatur numerus, cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & numerus hic intelligatur medius inter extremos; & numerus radicum sit extremorum summa: ex medio autem, & extremorum summa, quærantur numeri extremi, & ita reperietur valor, vtriusq; radicis quæsitæ, &c.

EXEM-

EXEMPLVM.

Sit æquatio 14 R — 1 Q ═ 48.

Hoc nihil est aliud, quàm dato rectangulo sub lateribus, & aggregato laterum, reperire latera, rectangulum autem erit 48.; siquidem ℞ 48, est latus medium ex tribus proportionalibus, &c. Summa laterum erit 14; cum autem quadratum aggregati laterum, minus quadruplo rectangulo sub lateribus, æquale sit quadrato differentiæ laterum; vt in nostrorum Problematum analysi ostendimus. Proinde differentia laterum esto 1 R, cuius quadratum 1 Q, erit æquale quadrato summæ laterum, nimirum 196; minus tamen quadruplo rectangulo, hoc est minus quadruplo numeri 48. Itaq; 1 Q ═ 4, ergo 1 R ═ 2. Proinde differentia laterum erit 2, qua habita, & etiam laterum summa, cognita, habentur latera; & ita reperiemus latera esse 8, & 6, & vtrumq; quæstioni satisfacit De his autem latius in Speciosa Logist. loquemur tractantes de æquationum constitutione.

Quid sit hæc æquatio, explicatur superior doctrina.

DEMONSTRATIO.

HVius methodi demonstrationem in speciosam Logisticen differimus, &c.

Huius methodi demonstrationem, vide in Algebra Speciosa.

Methodus Stevini.

SVmantur numeri quicunq; ad libitum, qui quidem oportuni credantur, & in his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec occurrat numerus quæsitus, &c.

EXEMPLVM.

14 R — 1 Q ═ 48.

Procedatur non dissimili modo, ac superiùs dictum fuit;

peri-

periculo nimirum facto in varijs numeris, qui idonei credantur, & reperiemus latera esse 8, & 6.

Methodus Coigneti.

Coigneti methodus declaratur.

SVmantur partes aliquotæ numeri absoluti, propositæ æquationis; & in his iterum, ac iterum periculum fiat, donec reperiatur numerus Problemati satisfaciens.

EXEMPLVM.

$$14 R - 1 Q = 48.$$

Partes aliquotæ numeri 48, sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; facto verò periculo in ijs, reperiemus, vt supra 8, & 6, quæstioni satisfacientes.

Methodus Girardi.

EXponantur partes aliquotæ numeri absoluti, tali ordine, vt binæ contra se positæ per multiplicationem efficiant numerum absolutum; posteà verò vtraq; æquationis pars diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum; deinde pars ea aliquota est eligenda, quæ si auferatur à numero radicum, remaneat altera pars coefficiens correlata.

EXEMPLVM.

$$1 Q = 14 R - 48.$$

Diuisa vtraq; æquationis parte per 1 R, fiet $1 R = 14 - \frac{48}{1 R}$ hoc est, si subtrahatur à 14, aliqua pars aliquota ipsius numeri 48, remanebit pars altera coefficiens correlata. Si auferatur 4, remanet 10, non est autem hic numerus, altera pars coeffi-

1	—	48
2	—	24
3	—	16
4	—	12
6	—	8

ciens

ciens correlata; si quidem ei respondet numerus 12; & ita de alijs; demum ablata parte 6, remanet 8, coefficiens correlata, & erit latus maius. Deinde auferatur abs 14, numerus 8, & remanet 6; coefficiens correlata: dicemus itaq; 6, esse partem minorem.

Generalis methodus Vietæ.

E *Dato in numeris plano sub latere, & data coefficiente longitudine affecto multa quadrati, latus analyticè elicere.* Quoniam in hac æquatione potestas est auulsa, si quidem planum sub latere, & data coefficiente longitudine efficitur multa quadrati, latus est anceps. Potestas enim negatur de homogeneo sub gradu, ac proinde latus anceps esse superiùs dicebamus, atq; adeo æqualitas de duobus lateribus explicabilis est. Huius autem æquationis præcepta longè facilius intelligentur, si vna cum exẽplis tradantur.

Quamobrem si proponatur æquatio 80R—1Q ⩵ 1344: obseruatis generalibus præceptis in qualibet æquatione ab arte præscriptis, &c. Latus maius, sub puncto sibi addicto collocandum, dico esse 2, cuius quadratum est 4, quo addito ad 1344; eo quo vis modo in adiuncto paradigmate fit planum restitutum 1744; cum restituens planum esset 4, quadratum primi lateris; ab hoc autem plano restituto auferatur 160; planum à latere primo in coefficiẽtem, & remanet 144, pro latere secundo indagando. Inuento diuisore, vt vides, & reperto quotiente quem Diophantus parabolam appellat, summa planorum, quorum vnum est à latere secundo in duplum primi, alterum quadratum lateris secundi, ita tamen, vt hoc vnius figuræ spatio antecedat, subtrahitur à plano facto ex latere secundo, in coefficientem longitudinem; excessus autem, si subducatur à reliquo resoluendi quadrati auulsi 144, nihil remanet.

Para-

Paradigma primum analyseos Quadrati auulsi ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	8	0	Sublateralis. 0 0 — R. 2 4 — Q. 4: 16
Planum sub latere multatum lateris resoluendi quadrato.	13	44	
	.	R.	
	Q 1	Q 13	
Planum restituens.	4		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum.	17	44	
Planum principale minuens.	16	0	A latere primo in coefficientem longitudinem.
	1	44	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens longitudo.		8 0	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	1	44	
Diuisorum pars inferior { Duplum lateris primi.		4	
Excessus diuisorum.		4 0	
Plana additiua {	1	6 0	A latere secundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum additiorum.	1	7 6	
Planum.	3	2 0	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani ablatitij æqualis residuo resoluendo auulso quadrato.	1	4 4	

Itaq; latus minus est 24. dum est æquatio 80R − 1Q = 1344

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	8	0	Sublateralis. 0 0
			R: 5 6
			Q 25: 36
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	1 3	4 4	
	1	R 1	
	Q 1	Q 11	
Planum restituens.	2 5		Quadratum lateris maioris.
Planum restitutum.	3 8	4 4	
Planum principale minuendum	4 0	0	A latere primo in coefficicientem longitudinem.
Excessus plani principalis reliquumque resoluendi quadrati auulsi.	1	5 9	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens.	8	0	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	1	5 6	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	1	0	
Excessus diuisorum superiorum.		1 0	
Plana ablatitia.	6	0	A latere secundo in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planum ablatitiorum.	6	3 6	
Planum addititium.	4	8 0	A latere secundo in coefficientem.
Excessus addititiorum æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.	1	5 6	

Latus itaq; maius erit 56. dum est item æquatio vt supra 80 R $-$ 1 Q $=$ 1344

Paradigma secundum analyseos quadrati auulsi ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	8	0	Sublateralis 0 0
		. .	R 2 6 Q 4: 36
Planum sub latere multatum lateris resoluendi quadrato.	1 4	0 4	
	.	R .	
	Q 1	Q 1 1	
Planum restituens	4		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum	1 8	0 4	
Planum principale minuens.	1 6	0	A latere primo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani restituti, reliquumue resoluendi auulsi quadrati.	2	0 4	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens		8 0	
		.	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	0 4	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		4	
Excessus diuisorum superiorum.		4 0	
Plana addititia	2	4	A latere secunda in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum additiorum.	2	7 6	
Planum ablatitium.	4	8 0	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani ablatitij, equalis residuo resoluendo auulso quadrato.	2	0 4	

Latus itaq; minus est 36. dum est æquatio 80R − 1 Q = 1404

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	8	0	Sublateralis. 0 0
		· ·	R · 5 4 — Q 25 · 16
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	14	04	
	·	R.	
	Q 1	Q 1 R	
Planum restituens.	25		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum.	39	04	
Planum principale minuendum.	40	0	A latere primo in coefficientem.
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati auulsi.		96	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. } Coefficiens		80	
		·	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.		96	
Diuisorum pars inferior. } Duplum lateris primi.	1	0	
Excessus diuisorum inferior.		20	
Plana ablatitia	4	0	A latere secundo in duplum primi.
		16	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum	4	16	
Planum additiium.	3	2	A latere secundo in coefficientem.
Excessus additiorũ æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.		96	

Latus igitur maius erit 54; dum est itidem ęquatio, vt supra

$$80\,R - 1\,Q = 1404$$

 Para-

Paradigma tertium analyseos quadrati auulsi ad inueniendam radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	2 1	6	Sublateralis.	0 0
				R. 4 2
				Q. 16. 4
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	7 3	0 8		
	.	R.		
	Q11	Q11		
Planum restituens.	1 6		Quadratum lateris primi.	
Planum restitutum.	8 9	0 8		
Planum principale minuendum.	8 6	4	A latere primo in coefficiente m-	
Excessus plani principalis reliquumue resoluendi quadrati.	2	6 8		

II. Eductio lateris singularis secundi

Diuisorum pars superior. { Coefficiens.	2	1 6	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	6 8	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		8 0	
Excessus diuisorum superiorum.	1	3 6	
Plana addititia {	1	6	A latere secundo in duplum primi.
		4	quadratum lateris secundi.
Summa planorum addititiorum.	1	6 4	
Planum ablatitium.	4	3 2	A latere secundo in coefficiente longitudinem.
Excessus plani ablatitij æqualis residuo auulso quadrato.	2	8 6	

Latus itaq; minus est 42. dum est æquatio 216 R − 1 Q = 7308.

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	2	1 6		Sublateralis. 0 0 0
		.	. .	R 1 7
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	0	7 3	0 8	Q 1 49
	.	R .	R .	
	Q I	Q II	Q III	
Planum restituens.	1			Quadratum lateris primi.
Planum principale minuendum.	2	7 3	0 8	
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati.	2	1 6		A latere primo in coefficientem.
		4 2	9 2	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens longitudo.	2 1	6	
		. .	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	4 2	9 2	
		.	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	2		
Excessus diuisorum inferiorum.	1	6	
Plana ablatitia {	1 4		A latere secundo in duplum latus primum.
	4 9		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	189		
Planum addititium.	151	2 .	A latere secundo in coefficientem.
Excessus ablatitiorum.	3 7	8	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	5	1 2.	

Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.

III. Edu-

III. *Eductio lateris singularis tertij tanquam secundi.*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens	2	1 6	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	5	1 2	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	3	4	
Excessus diuisorum superiorum.	1	2 4	
Plana ablatitia.	1 3	6	A latere secundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatorum.	1 3	7 6	
Planum additium.	8	6 4	A latere secundo in coefficientem.
Excessus additiorum, æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.	5	1 2	

0 0 0

R. 1 7 4

Q. 2 8 9 : 16

Quamobrem sit Radix maior, numerus 174, dum est æquatio vt supra 216 R — 1 Q ═ 7308. Cæterum hoc planum sub latere maiori multatum lateris quadrato acephalum est: idq; deprehenditur ex eo quia quæsita radix maior est 108, dimidio coefficientis; quamobrem oportet eam pluribus, quam duabus figuris exprimere: cumq; puncta quadratica duo tantum in proposito numero notari queant, necesse est illi, præfigere 0; sic enim tribus quadraticis punctis designatis, tres figuræ pro congruenti radice correspondebunt.

Para-

Paradigma quartum analyseos quadrati auulsi ad indagandam radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	1 0	4	Sublateralis.	0 0
				R. 3 6
				Q. 9 36
Planum sub late re multatum lateris resoluendi quadrato.	2 4	4 8		
		R.		
	Q1	Q12		
Planum restituens.	9		Quadratum lateris primi.	
Planum restitutum	3 3	4 8		
Planum principale minuens.	3 1	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.	
Excessus plani restituti, reliquumue resoluendi auulsi quadrati.	2	2 8		

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Duplum lateris	1	0 4	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	2 8	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris		6 0	
Excessus diuisorum superiorum.		4 4	
Plana addititia {	3	6	A latere secundo in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum addititiorum.	3	9 6	
Planum ablatitium.	6	2 4	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani ablatitij æqualis residuo resoluendo auulso quadrato.	2	2 8	

Latus itaq; minus est 36. dum est æquatio 104R — 1Q = 2448.

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1 0	4	Sublateralis.	o	o
		. .		R 6	8
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	2 4	4 8		Q 36.	64
	.	.			
		R			
	Q1	Q11			
Planum restituens.	3 6		Quadratum lateris primi.		
Planum restitutum.	6 0	4 8			
Planum principale minuendum.	6 2	4 0	A latere primo in coefficientem.		
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati.	1	9 2			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens	1	0 4	
		.	
Reliquum resoluendi quadrati.	1	9 2	
		.	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	1	2 0	
Excessus diuisorum inferiorum.		1 6	
Plana ablatitia {	9	6	A latere secundo in duplum primi
		6 4	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	1 0	2 4	
Planum additium.	8	3 2	A latere secundo in coefficientem.
Excessus additiorum æqualis residuo quadrato auulso.	1	9 2	

Latus igitur maius erit 68. dum est æquatio, vt supra 104R − 1 Q = 2448.

SCHO

SCHOLION.

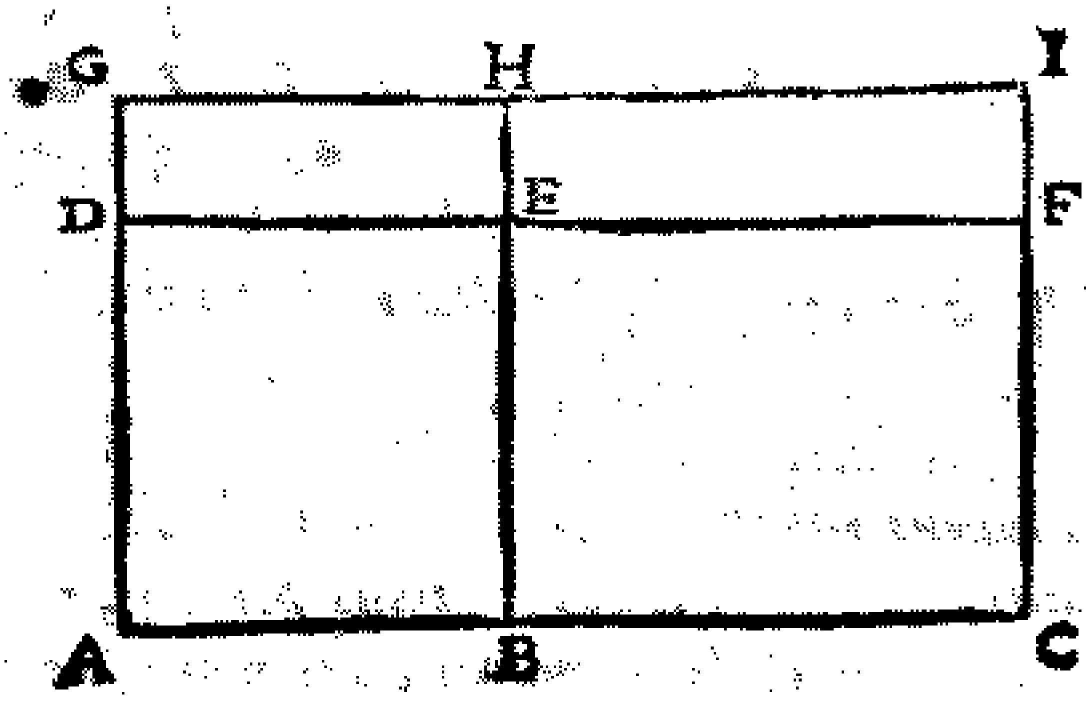
In hac æquatione habita radice minori facili negotio possumus maiorem assequi; nimirum diuidendo propositum planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato, per latus minus inuentum; hac enim instituta diuisione latus orietur maius: vt si 1344, diuidamus per 24, radicem minorem, fiet quotiens 56, & latus maius. Item diuiso numero 1404 per 26, latus minus, orietur quotiens 54, & latus maius. Præterea diuiso 7308, per 42, minorem radicem, orietur 174. Demum diuiso numero 2448, per 36, radicem minorem, fit quotiens, & radix numerus 68, & quidem radix maior.

Eandem radicem maiorem assequemur quoque, si inuentam radicem minorem, subtraxerimus à coefficienti: itaq; in priori exemplo, cum esset æquatio 80 R — 1 Q = 1344, inuenta minor radix 24, si subtrahatur ex 80, remanet 56, pro radice maiori. Et in secundo exemplo, cum esset æquatio 80 R — 1 Q = 1404, inuenta minor radix 26, si subtrahatur ex 80, relinquitur 54, pro radice maiori. Insuper in tertio exemplo, cum esset æquatio 216 — 1 Q = 7308, fit radix minor 42, quæ subtracta de 216, relinquit 174; pro radice maiori. Demum cum esset æquatio 104 R — 1 Q = 2448, erat minor radix 36, quæ subducta coefficienti 104, relinquit 68, pro radice maiori. Id quod de reliquis intelligendum.

Hæc autem Geometricè, facilè ostendi possunt: sit enim coefficiens AC, latus minus AB; sitq; constructa figura, vt vides. Cum AE, sit quadratum lateris minoris AB, & AF, sit planum sub latere, & data coefficiente, erit BF, comparationis homogeneum; hoc autem applicato ad BE, seu AB, fit BC, latus maius; nàm BI, quadratum ex BC (ita enim figuram suppono descriptam) si subtrahatur ex AI, quod erit planum sub latere maiori, & coefficienti, relin-

Quæ hactenus dicta sũt Geometricè ostenduntur.

relinquit A H, quod est æquale ipsi BF; quandoquidem comprehenditur sub lateribus AB, AG, quæ ęqualia sunt lateribus BE, BC, sub quibus BF, continetur. Hinc etiam patet, quod secundo loco dicebamus, nempe si ab ipsa coefficiente subtrahatur latus minus, remanere latus maius, &c.



Compendiosiùs hoc modo. Sumendus est numerus cuius quadratum, si subtrahatur à numero producto ex multiplicatione quæsiti numeri in numerum datum, remaneat numerus, à quo si subtrahatur productum ex dato numero in numerum quæsitum, nihil remaneat.

EXEMPLA.

4	8
14R — 1Q = 48	14R — 1Q = 48
36	64
84	112
84	112
00	00

```
                             1   2                                   3   0
                             .   .                                   .   .
 5 0R—1Q ═  4 5 6            5 0R—1Q ═  4 5 6
     2                       1                  3                    9
 ———————  50        ————————        ———————          ————————
 1 0 0    20         5 5 6          1 5 0 5 0          1 3 5 6
   4      —          5 0                    8          1 5 0
     4    30 Diui-  ————————          ——————————       ————————
 ———————     for.       5 6              4 0 0           1 4 4
   5 6                  5 6              4 8             1 4 4
                    ————————                6 4        ————————
                        0 0           ——————————         0   0
                                         5 4 4
                                         4 0 0
                                      ——————————
                                         1 4 4

                             6                                   2   4
                             .                                   .   .
 3 0R—1Q ═  1 4 4            3 0R—1Q ═  1 4 4
     6                     3 6                                   4
 ———————                ————————                              ————————
 1 8 0                   1 8 0       1 6       40              5 4 4
                         1 8 0         1 6     30              6 0 0
                        ————————     ————————  ——             ————————
                         0   0       1 7 6     10 Diui-          5 6
                                     1 2 0         for.          5 6
                                     ————————                 ————————
                                       5 6                       0 0
```

1 6

40R — 1Q = 3.8 4.

6   1

240   484

40   40

20   84

20 Diuisor.   84

00

2 4

40R — 1Q = 3.8 4.

40   4

0   784

800

16

16

00

4 2

100R — 1Q = 2436

4   16

400   4036

100   400

80

20 Diuisor.   16   200   36

4   164   36

164   36   0

5 8

100R — 1Q = 2436

25

80   4936

64   500

864   116   64

800   100   64

64   16 Diuisor.

00

44

256R—1Q ⊐ 9328 (with 4 4 and dots over the 9328)

4

1024

32

1024 16

336

336

688

256

80

Diuisor 176

16

10928

1024

688

688

0 0

256R—1Q ⊐ 09328 (with 2 1 2 and dots over the 09328)

2

512

41

256

154

1872

154

332

84

4

844

512

332

400

256

144 Diuisor primus.

420

256

164 Diuisor secundus.

4

49328

512

1872

154

332

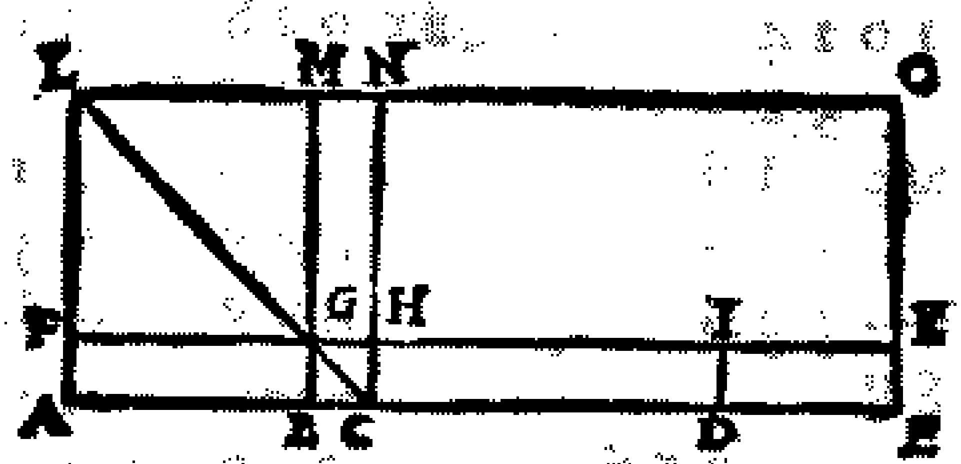
332

0 0

DE-

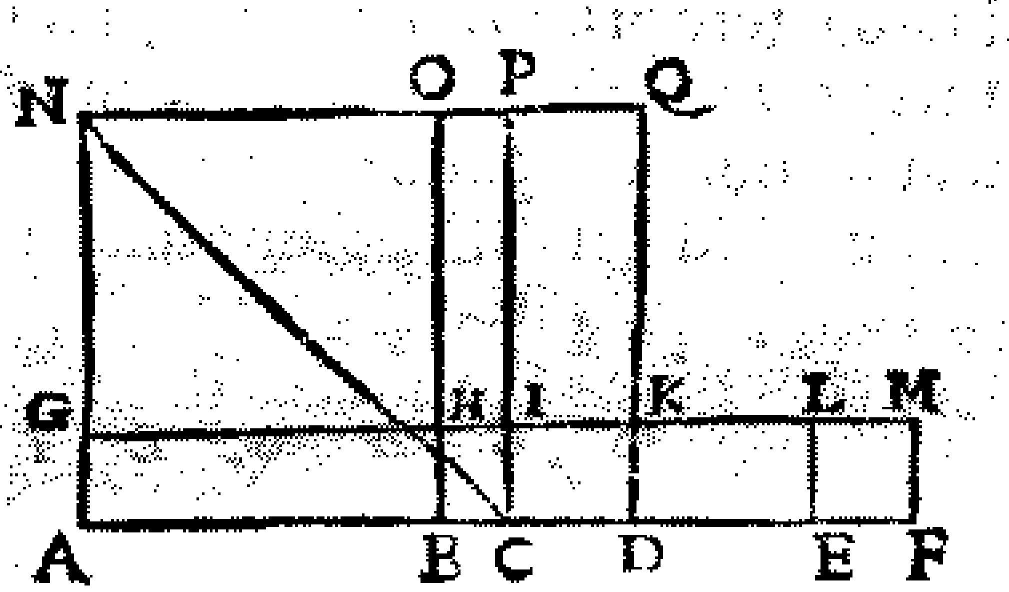
DEMONSTRATIO.

SIt AE, coefficiens longitudo; & AC, sit radicis valor; constituatur super AC, quadratum ALNC, & compleatur rectangulum ALOE; deinde sit A B, latus singulare primũ, illudq; maius; & sit BC, latus singulare secũdum; ducatur BM, parallela alterutri

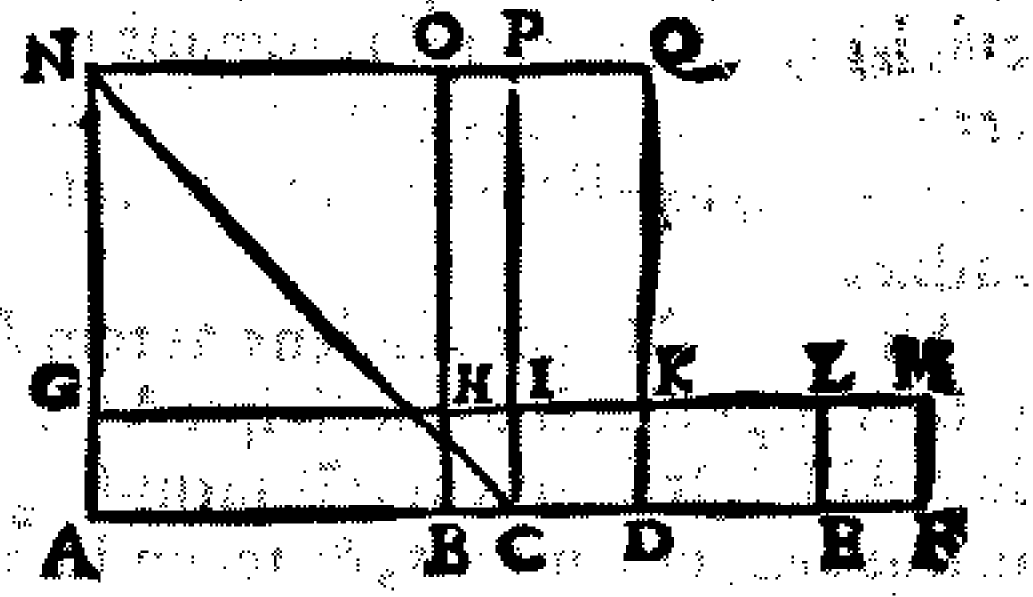


rectorum AL, CN, item, ducta diametro CL, per punctum intersectionis cum BM, in G, ducatur FK, transiens per G, erit enim BH, quadratum, quemadmodum FM; at verò quoniam AL, est lateris valor, & AE, coefficiens; erit AO, planum sub latere, & coefficiente: & quia est R—Q == N; ob id ex AO, subtracto AN, remanebit CO, pro comparationis homogeneo; præcipit autem methodus, vt FM, quadratum lateris primi addatur CO, comparationis homogeneo, vt habeatur planum restitutum, cum quadratum lateris primi diceretur planum restituens; itaq; habebimus duo plana FM, CO, à quibus, vt methodus iubet, auferri debet FO, planum sub latere primo, & coefficiente longitudine, remanebitq; planum applicandum, &c. sed idem est planum FO, subtrahere ex planis FM, NE; ac est planum GN, subducere ex CK, sunt enim FM, HO, communia; at cum GN, CK, sint eiusdem altitudinis, commodissimè instituetur subtractio, subducendo, GM, ex CE: sit igitur DE, æqualis GM, & facta subtractione remaneat CD, ducta DI, ad rectos angulos, seu parallela rectæ EO, vel CN; erit CI, residuum applicandum ad differentiam inter coefficientem, & duplum primi lateris: est autem coefficiens AE; lateris primi duplex est AB, plus DE; quamomobrem differentia erit BD, ad quam oportet applicare residuum CI: facta applicatione, fit quotiens CH, seu BC, latus secundum; si ea cautela seruetur in eligendo latere; vt nimirum quadratum ipsius cum rectangulo quod sub ipso, & duplo latere primo, si subtrahatur à plano sub coefficiente, & latere ipso, remaneat planum sub eodem latere, & differentia, qua coefficiens superat duplex latus minus iam ex illa subtractione residuum, & sic innotescit radix.

Sit radix AC, coefficiens autem AD; erigatur AN, ad rectos angulos, & æqualis ipsi AC, compleatur rectangulum ANQD; sit autem AB, latus singulare primum, illudq; maius BC, erit minus, & secundum: compleatur figura, ducta BO, parallela alterutri ipsarum AN, CP; & ducta GL, parallela alterutri AD, vel NQ, itaut transeat per H, pũctum intersectionis diametricũ BO; erit GO, quadratum ipsius AB, vt BI, ipsius BC: fiat autem CF, æqualis ipsi AB, lateri primo, & secetur in E, vt EF, sit æqualis BC; compleatur rectãgulum AGMF. *Demõstratio pro radice maiori.*



Quoniam AD, est coefficiens, AN, est radix; erit planum ANQD, comprehensum sub latere, & coefficiente: cui si subtrahatur quadratum AP, remanebit CQ; cui addito GO, quadrato primi lateris, vt methodus præcipit, fit planum restitutum, à quo subtrahendum GQ, planum sub latere primo, & coefficiente; hoc autem nil aliud est quàm subtrahere CK, ex HP; sunt enim GO, IQ, communia, & quia CK, HP, sunt eiusdem altitudinis, commodissimè poterit subtractio institui auferendo CD, ex HO, seu ex CF, quæ illi facta est æqualis, vt remaneat differentia DE: quamobrem residuum planum erit DM, applicancandum ad differentiam, qua duplex latus primum, superat coefficientem; sic enim methodus præscribit: est autem coefficiens AD, & est AB, latus singulare primum, cui facta est æqualis CF, cumq; EF, facta sit æqualis BC, erit BE, æqualis CF, itaq; AE, erit duplex latus primum, excedens AD, coefficientem, excessu DE: ad huiusmodi verò excessum si applicetur DM, ea lege, vt methodus præscribit, scilicet vt



eius quadrato addito illi rectangulo, quod sub ipso, & duplo latere primo continetur, faciat planum, à quo subtracto plano sub ipso latere secundo, & coefficiente, remaneat planum sub eodem, & ipsa differentia; erit latus secundum FM, seu BC, sic innotescit radix.

SCHOLION.

Aduerte nonnulla. *Haec autem explicari possunt numeris, desumptis ex paradigmate quarto; si nimirum pro demonstratione radicis minoris supponamus æquationem 104 R — 1 Q = 2448; cuius radicem adinuenimus 36; & pro radice maiori supponamus æquationem 104 R — 1 Q = 2448, cuius radicem dicebamus esse 68: applicatione itaq; istorum numerorum demonstrationes illustrari, vel numeris consimilium æquationum ipsæ quidem enucleari possunt, vt cuicunq; perspicuum esse potest.*

CO-

COROLLARIVM.

Constat ex dictis per hanc æquationem nihil aliud inquiri, quàm numerum, qui si ducatur in numerum datum, & à producto subtrahatur quadratum numeri quæsiti, remaneat numerus, alter datus; vt si proponeretur, *Quid colligendum ex dictis.*

Numerum reperire, qui si ducatur in 20, producat numerum, à quo si dematur, quadratum numeri quæsiti, remaneat numerus 75. *Problema.*

Quæsitus numerus sit 1 R, quæ si ducatur in 20, facit numerum 20R, à quo si subtrahatur 1 Q, nimirum Q, vnius radicis, fit residuum 20 R — 1 Q, & erit æquatio 20 R — 1 Q = 75. *Eiusdem modatio.*

SCHOLION.

Hic etiam aduertere nos operæ pretium duximus artem reuocandi huiusmodi æquationem, ad æquationem simplicem inter R, & N; fitq; hoc pacto. Sit æquatio vt supra; sed hoc modo 1 Q ✠ 75 = 20 R. Auferantur 20 R, vtrinq; & erit æquatio 1 Q — 20 R ✠ 75 = 0. Sumatur — 10, dimidium numeri radicum, & huic addito latere quadrati; nempe 1 R, fit summa 1 R — 10, cuius quadratum est 1 Q — 20 R ✠ 100, sed esse debebat 1 Q — 20 R ✠ 75. Proinde vtrinq; oportet addere 25, & erit æquatio 1 Q — 20 R ✠ 100 = 25, ergo, & eorum latera æqualia erunt 1 R — 10 = 5. Vtrobiq; additis 10, fit æquatio 1 R = 15, &c. *Nonnulla aduertēda.*

De explicandis æquationibus cæteris, in quibus terminorum exponentes seruant Arithmeticam proportionem.

CAPVT XIII.

Quando exponentes seruant Arithmeticam proportionem præter eas, quas diximus, adsunt aliæ æquationes, quæ certa via possunt explicari; vt QQ ✠ Q = N. Insuper CC ✠ C = N. *Quando in æquationibus, terminorum exponentes, nō* *seruat Arithmeticam proportionē, quæ ante præcedendā sit declaratum.*

Ex dictis autem facilè colligi potest, quid agendum in huiusmodi æquationum explicationibus; Radix enim eius generis est eruenda, quæ ab altiori dignitate significatur; vt si foret æquatio QQ + Q = N; eruenda esset radix, vt loquuntur Zensizensica, seu Quadrato-quadratica, &c. à maiori namq; potestate Radix appellationem mutuatur, obseruatis præceptis superiùs traditis.

EXEMPLVM.

1 QQ + 8 Q = 825.

4	*Dimidium numeri Quadratorum.*
16	*Eius quadratum* } *Adde.*
825	*Numerus absolutus* }
841	*Aggregatum.*
29	*Aggregati latus* } *Subtrahe.*
4	*Dimidium numeri quadratorum* }
25	*Residuum.*
5	*Residui latus.*

Proposita sit æquatio vt supra. Dimidium numeri quadratorum est 4, cuius quadratum est 16; additum numero 825, facit 841, cuius latus quadratum est 29; à quo subtracto 4, dimidio numeri quadratorum, remanet numerus 25, cuius latus quadratum est 5, & est 1 R, pretium.

Hæc æquatio non indiget particulari explicatione.

Hæc autem æquatio, vt patet, non indiget particulari explicatione; nam si 1 QQ + 8 Q = 825: ergo 1 Q + 8 R = 825, & 1 R intelligetur quadratum lateris de quo primum quærebatur. Et in hisce æquationibus explicandis obseruanda sunt præcepta superiùs tradita, ad enodandas equationes quadrati affecti adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine. Item affecti mulcta plani sub latere, & data coefficiente longitudine. De-

mum

mum plani sub latere, & data coefficiente longitudine affecti multa quadrati.

EXEMPLVM.

1 QQ — 8 R = 425.

4 *Dimidium numeri Quadratorum.*

---

16 *Eius quadratum*
425 *Numerus absolutus* } *Adde.*

---

441 *Aggregatum.*
21 *Aggregati latus*
4 *Dimidium numeri quadratorum* } *Adde.*

---

25 *Aggregatum.*
5 *Aggregati latus.*

EXEMPLVM SECVNDVM.

15 *Dimidium numeri Quadratorum.*

---

225 *Eiusdem dimidij Quadratum*
125 *Numerus absolutus* } *Subtrahe.*

---

100 *Residuum.*

10 *Residui latus*
15 *Dimidium numeri quadratorum* } *Adde.*

---

25 *Aggregatum.*
5 *Aggregati latus quadratum, & latus minus quaesitum.*

---

15 *Dimidium numeri quadratorum*
10 *Residui latus* } *Subtrahe.*

R. 5 *Differentia latus quadratum, & latus minus quaesitum.*

Et hæ quidem æquationes explicari possent per omnes alios modos, quos superiùs attulimus.

Sit æquatio 1 CC + 8 C = 945, hac eadem arte poterit enodari; vt in æquatione inter Q + R, & N.

EXEMPLVM.

1 CC + 8 C = 945.

4	*Dimidium numeri cuborum.*	
16	*Eius quadratum*	*Adde.*
945	*Numerus absolutus*	
961	*Aggregatum.*	
31	*Aggregati latus*	*Subtrahe.*
4	*Dimidium numeri Cuborum*	
27	*Residuum.*	
3	*Residui latus cubicum.*	

Operationis examen.

Dimidium numeri cuborum est 4, cuius quadratum 16, additum numero 945, facit 961; cuius latus quadratum est 31, à quo dempto 4, dimidio numeri cuborum, remanet 27, cuius latus cubicum est 3; Dicemus itaq; latus cubo-cubicum quæsitum esse 3, & ita suo modo de reliquis, &c.

De

De explicandis æquationibus, in quibus terminorum exponentes non seruant Arithmeticam proportionem, & primò de æquationibus Cubicis.

CAPVT XIV.

NOn est cur hic immoremur in recitando Steuini, & Coigneti modos, quibus has explicant æquationes; etenim ex dictis de æquationibus quadratis, comprehendi facilè potest: qua arte praxis in explicatione harum æquationum institui debeat.

Auctor se abstinet à recensendis quorūdam methodis.

Methodi explicandi æquationem inter C + R, & N.

Methodus Girardi.

MEthodus ista noua non indiget explicatione, præter superiùs allatam; proinde statim ad exemplum accedam.

Gherardi methodus explicatur.

EXEMPLVM.

$$1\,C = -\,8\,R + 264.$$

1 — 264		6 — 44	
2 — 132		8 — 33	
3 — 88		12 — 22	
4 — 66			

Partes aliquotæ numeri 264; sunt hæ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 22, 33, 44, 66, 88, 132, 264; quibus ordinatis sic, vt

binæ

binæ inter se ductæ faciant 264, vt vides; diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, & fiet depressio ad proximum inferiorem gradum hoc modo 1 Q $=$ $-8+\frac{264}{1R}$, & fit 6, 1 R pretium.

Explicatur superior doctrina. Hoc est si numerus 8, subtrahatur alicui ex partibus aliquotis numeri absoluti 264, remanet quadratum quæsitæ radicis, ea tamen est eligenda pars aliquota, cui si auferatur numerus 8, remaneat quadratum alterius partis coefficientis correlatæ. Vt in hoc nostro exemplo cuilibet cernere licet: si namq; subtraheremus 8, à 264, remaneret numerus 256, quem haud esse quadratum, ipsius 1, partis nimirum alterius coefficientis correlatæ manifestum est. Idem continget si subducatur idem numerus 8, reliquis partibus 132, 88, 66; At secus si subducatur a 44; etenim facta subtractione, remanebit numerus 36, qui quidem est quadratum numeri 6, nempè alterius partis coefficientis correlatæ.

Generalis Methodus Vietæ.

Vieta methodus generalis explicatur. E *Dato in numeris Cubo affecto adiunctione solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.*

Sit iniunctum, latus cubicum extrahere ex hac æquatione; in qua nimirum est 1 C + 34 R $=$ 1471 4455. Cubus est affectus, quæritur numerus, qui ductus in sui quadratum, & in 34, faciat 1471 4455. Numerus autem 1471 4455, non est purus cubus; sed affectus adiunctione solidi, sub latere, & dato plano 34. *Genesis affecti cubi, quid addat genesi cubi puri.* Genesis affecti cubi, hoc tantùm addit genesi cubi puri, vt singulare latus, quod primùm elicitur ducatur in planum coefficiens. Deinde in idem etiam ducatur secundum latus.

Latera cubi affecti, quomodo eliciantur. Ad elicienda verò latera ex affecto huiusmodi cubo, fieri debet per puncta figurarum signatio, quemadmodum in analysi puri Cubi nos adnotauimus; idest sedes vnitatum cubos singulares metientium per ternas alternas figuras

guras distinguentur punctis subtus à dextra ad læuam adnotatis; hoc est vna signata figura, duæ prætermittantur. His autem peractis, quot sunt cuborum sedes, punctaue; tot sedes simplicium laterum (cum planum coefficiens sublaterale sit) supra singulas figuras constituentur, punctisq; positis distinguentur. Aduertendum autem in vltima simplicium sede, quæ prima est à læua ad dextram procedendo, consistere planum coefficiens; quòd si pluribus, quàm vna figura constaret, reliquæ figuræ in anteriora prorumpent. His autem absolutis, eliciantur latera, quemadmodum agentes de analysi puri cubi docuimus; hoc addito, quod ipsum planum coefficiens in numerum diuisorum adscribendum est. In illud autem ducenda sunt singularia latera, atq; solidum, quod inde fit, sub sede ipsius coefficientis desinere debet; illudq; auferendum est, ex affecto cubo proposito. Coefficiens autem in loca succedentia ordinatim subijciatur, diuisoresq; subtus etiam moueantur; quemadmodum ex adiuncto paradigmate colligere licet.

Quo modo sit figurarū instituenda signatio.

Aduerte.

Quando coefficiens pluribus figuris cōstet prorūpit ad lauā; quod inferiùs magis explicabitur.

Vbi desinat solidū factū ex coefficiēte in latus secundum.

Coefficiens in succedētia loca subijciatur.

Dum est æquatio 1 C + 34 R = 147 14455, subtus adnotatis punctis, vt vides, per ternas alternas figuras, sedes vnitatum metientium singulares cubos distinguuntur, quot autem sunt hæc puncta subtus adnotata, nempe tria, tot supra etiam adnotanda sunt per singulas figuras; ex illis autem primum cadit sub 5, prima figura ad dextram; deinde duobus prætermissis, aliud sub 4, quinta figura; deniq; aliud eadem lege sub 4, octaua figura. Supra puncta verò, cadunt in 5, 5, 4, continuatim, vt vides. At verò 34, est coefficiens planum, quod consistit in vltimo puncto pergendo à dextra ad læuam. Tria illa puncta superiùs posita, dicuntur puncta simplicium laterum; quoniam coefficiens est planum sublaterale. Si planum illud pluribus figuris constet, quàm vna; reliquæ figuræ prorumpere debent in anteriora, vt hic vides ad læuam prorumpentem figuram 3, numeri 34; constantis duabus figuris 3, & 4; latera verò elicientur, vt in analysi puri cubi;

Proponitur æquatio explicāda.

Quot puncta subtus notātur, totidē supra, illa cubicè, hæc autem continuata serie.

Illa tria pūcta superiùs posita dicūtur pūcta simplicium laterū, & quare.

Plano coefficiēte pluribus cōstāte figuris, reliqua fi.

cubi;

gura debet in anteriora sinistrorsum prorumpere. *Lateris extractio, instar cubi puri.*

cubi; prius enim elicitur latus cubicum 2, ex 14, numero signato per punctum inferiùs; huius cubus est 8, qui notari debet sub eodem puncto; adeo vt si pluribus, quàm vnica figura constaret, prorumpat in anteriora; debet enim desinere sub ipso puncto; deinde hoc primum latus 2, ducatur in coefficiens planum 34, vt fiat 68; & solidum hoc factum notetur subtus desinens sub coefficiente, vt subtractione instituta ex 8, cum quinque cifris annexis, vt ex 800000, remaneat 80068; hoc autem numero subducto ex numero 147144[1], remanet 67076; huic annexis duabus postremis figuris 55, fit numerus 6707655. Modo fit transitus ad succedentia puncta, moto coefficiente plano in succedens punctum. Instituitur autem eductio secundi lateris, ad quod indagandum paratur diuisor, sumendo triplum quadratum lateris primi 2, nempe 12; vt diximus in generalibus præceptis; notaturq; sic, vt desinat sub sede Quadrati notata per Q; sumatur triplum eiusdem lateris, scribaturq; sic, vt desinat sub sede lateris notata per R; numerus, autem 34, coefficiens planum è diuisoribus esto; noteturq; sua sede, vt vides, adeo vt desinat sub puncto simplicium laterum, in quo coefficiens planum consistit; & fit summa diuisorum 126034, atq; diuisor ipse; per quem diuiso numero 6707655, fit quotiens 4. Solida verò notantur seruato ordine, vt vides, & subtrahũtur, remanetq; 882295. Modo instituenda est eductio lateris tertij, non secus ac factum fuit ad indagandum secundum; siquidem duo illa latera elicita, vnius vice, munereq; funguntur. Paratur diuisor non dissimili artificio, moto coefficiente in succedens punctum. Mouentur, & alij diuisores identidem, atq; notantur, seruata debita lege; diuisore parato, atq; reperto quotiente, solida notantur, & auferuntur, vt vides.

Secundi lateris indagatio.

Tertij lateris eductio.

Paratur diuisor ad indagandum tertium latus non secus, ac ad inuestigandum secundum.

Para-

Paradigma analyseos Cubi affecti adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.		3	4	
			. . .	
Cubus affectus resoluendus	1 4	7 1 4	4 5 5	
		Q R.	Q R.	Puncta cubica
	C 1	C R 1	C 1 1	
Solida in primis auferenda.	8			Cubus lateris primi.
		6	8	A latere primo in coefficiens planum.
Summa solidorum ablatitiorũ	8	0 06	8	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	6	7 07	6 5 5	

Sublaterale 0 0 0

Tot puncta laterum simplicium, quot cubica, sedesue cuborum.

R 2 4
Q 4 1 6
C 8 6 4

Tot numerales circuli, quot puncta cubica, lateraue singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.			3 4	
			. .	
Reliquum resoluendi Cubi affecti.	6	7 0 7	6 5 5	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi.	1	2		
Triplum latus primum.		6		
Summa diuisorum.	1	2 6 0	3 4	
Solida ablatitia.	4	8		A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		9 6		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		6 4		Cubus lateris secundi.
		1	3 6	A latere secundo in coefficiens planũ.
Summa solidorum auferenda.	5	2 8 5	3 6	
Reliquum resoluendi cubi.		8 8 2	2 6	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius.

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		34	
Reliquum resoluendi cubi.		882	295	R 2 4 5 Q 5 76 25 C 13824 125
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	172	8	
	Triplum latus primum.		72	
Summa diuisorum.		1735	54	
Solida ablatitia		864	0	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		18	00	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			125	Cubus lateris secundi.
			170	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferẽda æqualis residuo resoluendo cubo affecto.		882	295	

Examinatur radix extracta & reperitur quæstioni satisfacere.

Vides igitur propositæ æquationis radicem esse 245, quæ satisfacit quæstioni: quandoquidem cubus ipsius est 14706125, huic si addatur numerus 8330, factus per multiplicationem eiusdem radicis, in planum coefficiens 34, fit 14714455. Et ita numerus inuentus est, qui ductus in sui quadratum, & in 34, facit 14714455, vt quæritur.

Quæ hactenus tradita sunt facilius absoluuntur.

Proponitur explicanda æquatio.

Hæc æquatio duplici

Clariùs autem instituetur hunc in modum analysis. Supponamus hanc dari æquationem, nimirum $1C + 12R = 12443$. In numero 12443, fiat signatio per puncta quemadmodum cubica radix exposcit; nempè signentur figuræ sic initio facto à dextris, vt semper duæ ommittantur, hoc est vna signetur duabus intermissis. Cum autem numerus 12443, hac lege designatus duas habeat notas

pun-

punctis indicatas; proinde duplici nota, seu figura huius æquationis radix constabit.

figura constant in radicem habet.

Primò ex primo puncto 12, subtraho cubum 8; & latus 2, supra noto vt vides: facta verò subtractione, remanet numerus 4, notandus sub linea ducta; & ei annecti debet numerus 44, qui sequitur post 12: modo 2, prima figura inuenta, ducatur in 12, numerum radicum, & fiunt 24: quibus ablatis à 444, remanet numerus 420; huic addatur postrema figura 3, existens in numero 12443; & fit numerus 4203.

Secunda figura indagatur.

Ad indagandam secundam figuram paratur diuisor hoc modo. Sumatur triplum quadrati primæ figuræ, nempe 12; deinde triplum ipsius numeri 2, primæ figuræ, nempe 6; & scribatur hic numerus 6, sub 12; hac tamen cautela, vt anteceat vnius figuræ loco dextrorsum, itaut fiat numerus 126; cui addito 12, numero radicum, eodem pacto nimirũ, vt anteceat vnius figuræ spatio versus dextrã, & fiet numerus 1272; & hic est diuisor per quem diuidẽdus est numerus 4203: factaq; diuisione, emerget quotiens numerus 3; & hic est scribendus pro secunda figura quæsita. Nunc verò à numero 4203, subtrahatur numerus, qui prouenit ex multiplicatione quadrati primæ figuræ 2, nempe 12, in secundam figuram, nimirum 3; prouenit autem 36, vt patet; quo ablato ab ipso 4203, posito tamen sub 42, vt vides, & rema-

```
                          2   3
1C + 12R = 1 2 4 4 3
                          .   .
                          8
                        -----
1 2                     4 4 4
   6                      2 4
-----                   -----
1 2 6                   4 2 0
   1 2                  3 6
-------                 ---
1 2 7 2                   6 0
                            5 4
                          -----
                            6 3
                            2 7
                          -----
                            3 6
                            3 6
                          -----
                            0 0
```

manet 6; cui annectatur o, sequens nota in numero 420, vt fiat numerus 60; ab hoc autem detrahere debemus 6, triplum primæ figuræ 2, multiplicatum per 9, quadratum secundæ figuræ, hoc est numerum 54; factaq; detractione remanet 6; cui addita postrema nota 3, fit numerus 63: à quo primò subtrahatur 27, cubus secundæ figuræ 3, & remanet numerus 36; factaq; subtractione, remanet o; reperiemus itaq; quæsitam radicem esse 23, quod faciendum erat.

Aliud æquationis exemplum. Non dissimili arte poterit Analysis institui, cum æquatio proponitur 1 C + 34 R ═ 1471 4455, superiùs allata, methodoq; Vietæa resoluta.

Non dissimili artificio fit satis proposita æquationi. Prima figura inuentio. Facta signatione per puncta, vt huius analysis natura exigit: sumatur latus cubicum primi numeri 14, & est 2; cuius cubo subtracto ex 14, remanet 6, numerus, cui annectantur sequentes figuræ 7144, vt fiat 67144; & ex hoc numero subducatur 68, numerus productus ex multiplicatione plani coefficientis 34, in 2, primum latus singulare: facta subtractione, remanet 67076; cui annectatur sequens figura 5, vt fiat numerus 670765.

Secunda figura qua arte reperiatur. Ad indagandam secundam figuram paro diuisorem hac arte. Sumo 12, triplum quadrati primæ figuræ 2; & sumo 6, triplum latus primum: hos autem numeros ita dispono, vt scribendo 6, sub 12, ea lege, vt antecedat vnius figuræ spatio, fiat 126; huic autem numero annecto coefficiens planum scilicet 34, vt præcedat duarum figurarum spatio, & fiat 126034: per quem diuidatur numerus 6707655, fiet quotiens 4; licet enim 126034, numerus ingrediatur pluries in numero 6707655, quàm quater; tamen quotiens est 4, quia non possent subtrahi deinde solida subtrahenda; cum tali siquidem cautela, quotiens elici debet. Ex 6707655, aufero 48, solidum à latere secundo in quadratum lateris primi, ad eum modum, vt in paradigmate vides, & remanet 190765; à quo ablato 96, solido facto à quadrato lateris secundi in triplum lateris primi, & remanebit 94765; à quo subtracto 64, cubo lateris secundi, remanet

manet

manet 88365, à quo detracto solido facto à latere secundo 4, in coefficiẽs planum, remanet 882295.

Ad indagãdam tertiam figuram, paro diuisorem non dissimili modo. Sumo triplum quadratum lateris primi, latus autem primum, modo est 24, eius quadratum est 576, cuius triplum est 1728, deinde addo 72, triplum latus primum, ita tamen, vt antecedat vnius figuræ loco, & fit 17352; cui addito 34, coefficiente plano, fit 173554, numerus, per quem diuisis 882295, fit quotiens 5, tertia figura: modo ab hoc numero 882295, subtrahatur 8640, solidum à latere secundo, hoc est tertia figura, in quadratum triplum lateris primi, & remanebit 18295; à quo subtrahatur 1800, solidum à quadrato lateris secundi, seu tertiæ figuræ in triplum lateris primi, & remanet 295; à quo dempto 125, cubo lateris secundi, seu tertiæ figuræ, & remanet 170; à quo dempto solido à latere secundo, seu tertia figurã in coefficiens planum, nihil remanet.

```
                2     4     5
1C + 34R = 1 4 7 1 4 4 5 5
           .     .     .
           ---------------
           8
           ---------------
           6 7 1 4 4
                 6 8
           ---------------
           6 7 0 7 6 5
           4 8
           ---------------
           1 9 0 7 6 5
             9 6
           ---------------
             9 4 7 6 5
               6 4
           ---------------
             8 8 3 6 5
                 1 3 6
           ---------------
           8 8 2 2 9 5
           8 6 4 0
           ---------------
             1 8 2 9 5
             1 8 0 0
           ---------------
                 2 9 5
                 1 2 5
           ---------------
                 1 7 0
                 1 7 0
           ---------------
                 0 0 0
```

Pa-

Paradigma aliud analyseos cubi affecti adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.			2 0	
Cubus affectus resoluendus.		5 1	3 9 3	
Solida in primis auferenda.		2 7		Cubus lateris primi.
			6 0	A latere primo in coefficiens planum
Summa solidorum ablatitiorum		2 7	6 0	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		2 3	7 9 3	

	0	0
R	3	7
Q	9	49
C	27	343

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		2 0	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		2	3793	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		2 7	
	Triplum latus primum.		9	
Summa diuisorum.			2810	
Solida ablatitia		1	8 9	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
			4 4 1	A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
			343	Cubus lateris secundi.
			140	A latere secundo in coefficiens planum.
summa solidorum.		2	3793	

Si

Si itaq; propoſita ſit æquatio 1 C + 20 R = 51393, ſit radix quæſita 37, quæ ſatiſfacit quæſtioni; ſiquidem hæc ducta in ſui quadratum, & in 20, facit 51393.

	37
	37
	259
	111
	1369
	37
37	9583
20	4107
740	50653
	740
	51393

Paradigma item aliud, analyſeos cubi affecti adiunctione ſolidi ſub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.		3	8 .	Sublaterale
			. . .	Tot puncta laterũ ſimplicium, quot cubica, ſedesue cuborum. 0 0 0 — R 4 5, Q 16 9, C 64, 27. Tot numerales circuli quot&c.
	8 2	8 9 8	4 2 4	
	.	Q R.	Q R.	
	C 1	C 1	Q 1	
	6 4			Cubus lateris primi.
Solida auferenda		1 5	2	A latere primo in coefficiens planũ.
Summa ſolidorum ablatitiorum.	6 4	0 1 5	2	
	1 8	8 7 3	2	

II. Eductio lateris singularis secundi

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.			38	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		18	883	224	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	4	8		
	Triplum latus primum.		12		
Summa diuisorum.		4	920	38	
Solida ablatitia.		14	4		A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		1	08		A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
			27		Cubus lateris secundi.
			1	14	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferenda.		15	508	14	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		3	375	084	

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur.

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum cubi affecti			38	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		3	375	084	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadrati lateris primi.		554	7	
	Triplum lateris primi.		1	29	
Summa diuisorum.			556	28	
Solida ablatitia.		5	328	2	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
			46	44	A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
				216	Cubus lateris secundi.
				228	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferenda æqualis residuo resoluendo cubo.		3	375	048	

	0	0	0
℞	4	3	36
Q	1849		36
C	79507		216

Si

Si itaq; fuerit 1 C + 38 R = 8289424, fit 1 R, valor 436, & satisfacit quæstioni; siquidem numerus hic ductus in sui quadratum, & in 38, facit numerum hunc 8289424.

SCHOLION.

Modus alter hãc eãdem æquationem explicandi.

EXtat, & alter etiam explicandi modus, qui requirit praxim extrahendi radicem cubicam ex aliquo Binomio; breuiter igitur nonnulla de his in medium afferemus.

Quid primò supponendum.

Primò supponendum est ex Binomijs, quædam habere latus cubicum, quædam verò non. Hoc autem tali arte cognoscitur. Aduertendum est, num si quadrentur nomina differentia quadratorum, sit numerus cubus, etenim cum fuerit cubus, etiam binomium cubicum erit; si verò non, Binomium non erit cubicum, hoc animaduerso.

Propositi binomij, qua arte extrahatur latus cubicũ.

Propositi Binomij hac arte exhibetur latus cubicum. Primò quadrentur nomina, & ex illorum differentia sumatur latus cubicum. Secundò, oportet duos numeros reperire, quorum vnus sit irrationalis, seu surdus, alter verò non, quorum quadrata differant per latus cubicum differentiæ quadratorum; & vt productum triplum ex numero non surdo, in quadratum numeri irrationalis, additum cubo numeri non surdi, & simplicis faciat numerum absolutum, ac simplicem ipsius Binomij.

His consideratis. Si proponatur æquatio, vt supra sumatur cubus tertiæ partis numeri radicum, & adatur quadrato dimidij numeri absoluti; nàm aggregati lateri additum, vel subtractum dimidium numeri absoluti gignit Binomium, & Apotomen, seu residuum. Si latus cubicum Apotomes, siue residui subtrahatur à latere cubico Binomij, residuum quæsitæ radicis valorem repræsentabit.

Quando numerus absolutus æquationis plura habet puncta, quàm figuras eius latus.

Insuper animaduertendum est plerumq; contingere (loquor de methodo Vietæ superius declarata) vt numerus absolutus æquationis plura habeat puncta, quàm figuras eius latus; Ita ut sæpe sæpius in numero per tria puncta signatio reperiatur, & radix duabus constet figuris, quod tunc accidit, quando radicum

numè-

numerus adeo magnus est, vt subtrahi nequeat, eo quo opus est modo, tunc prætermisso primo puncto, fit deuolutio, & proceditur ad punctum vlterius.

Sit æquatio 1 C + 98600 R = 3187968. *In hac æquatione cubus minor est afficiente solido; proinde cubus non tam afficitur, quàm potius afficit. Dum igitur contingit coefficientem sub gradualem magnitudinem in anteriora produci, vltra ipsum affectum cubum, vel eo saltem loci, vt ab eo nequeat auferri; quod est argumentum, non tàm cubum affici, quàm afficere, cum cubus sit minor afficiente solido: Coefficiens ad succedentes sedes ordine reuocanda est, donec diuisio institui possit, à qua præstat initium operis sumere; quot autem figuris retrocedet, tot puncta, vel cuborum loca subtus delebuntur, à quibus erat alioquin sumendum initium.*

Proponitur æquatio explicanda.

Paradigma cum solidum affectionis sub latere maius est cubo.

I. Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens planum.	9	860	0	Sublatere.
			• • •	Tot puncta simplicium laterum, quot cubica, sedesue cuborum.
Cubus afficiens resoluendus.	3	187	968	
	•	•	•	Puncta cubica.
		QA	QR	
	CI	CII	CIII	

Quoniam 9, maior est, quàm 3, fit Deuolutio.

II. Educ-

II. Eductio lateris singularis primi post Deuolutionem.

Coefficiens planum principalium diuidens.	686	00	
		. .	
Cubus afficiens resoluendus.	3187	968	
	C 1	Q R.	
		C 1	
Solida ablatitia.	2058	00	A latere primo in coefficiens planum.
	27		Cubus lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum.	2085	00	
Reliquum cubi affecti resoluendi.	102	968	

.	.
R 3	2
Q 9	4
C 27	8

III. Eductio lateris singularis secundi :

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.	98	600	
Cubi affecti resoluendi reliquum.	102	968	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadrati lateris primi.	2	7	
Triplum latus primum.		9	
Summa diuisorum.	101	300	
Solida ablatitia.	197	200	A latere secundo in coefficiens planum.
	5	4	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		36	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
		8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum æqualis residuo afficiente cubo.	102	968	

Expeditur superior methodus. Si itaq; proposita fuisset æquatio 1C + 98600R = 3187968, fit 1R, valor 32; numerus quæstioni satisfaciens; nam ductus in sui quadratum 1024, & in 98600, facit 3187968, vt præcipitur. Si enim 32, ducatur in 1024, fit 32768, cubus scilicet ipsius 32, si verò 98600, multiplicentur per 32, fit numerus 3155200, huic enim si addatur 32768, fiet numerus 3187968. Cęterũ 3187968, est cubus adiunctus solido sub latere, & dato plano 98600, est autem maius solidum cubo, quemadmodum indicat coefficientis situs eo loci; nam coefficiens vnus ex diuisoribus, à diuidendo tolli non potest; ob id in proximè succedentem locum deuolutio est facta, deleto, quoque puncto cubico ad læuam primùm occurrente subtus posito, & à diuisione potius sumendum initium, quàm à radicis extractione, cum coefficiens principaliùs diuidat, quàm ipsius lateris cubus, vel lateris quadratum.

Paradigma aliud cum solidum affectionis maius est cubo.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens planum	9	8 60	0	Sublaterale.
Cubus affectus resoluendus.	3	1 8 7	9 6 8	
		Q R	Q R	
	C I	C II	C III	

R	1	2
Q	1,	4
C	1,	8

Quoniam 9. maior est, quàm 1, fit Deuolutio.

II. Edu.

II. Eductio lateris singularis primi post Deuolutionem.

Coefficiens planum principalius diuidens.	956	80	
		· ·	
Cubus afficiens resoluendus.	1149	888	
	C1	C11	
Solida ablatitia.	956	80	A latere primo in coefficiens planum.
		1	Cubus lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum	957	80	
Cubi affecti resoluendi reliquum.	192	088	

III. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	95	680	
Cubi affecti resoluendi reliquum.		192	088	
			· ·	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadrati lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Summa diuisorum.		96	010	
Solida ablatitia.		191	360	A latere secundo in coefficiens planum.
			6	A latere secundo in triplum quadratum primi.
			12	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
			8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum auferenda equalis residuo resoluendo afficiente cubo.		192	088	

Itaq;

Itaq; 1149888, est cubus adiunctus solido sub latere, & 95680, dato plano; est autem maius solidum cubo, vt indicat situs coefficientis eo loci; vt cum ipsa è diuisoribus sit, à sui diuidendo tolli non potest. Ac proinde in proximè succedentem locum facta est deuolutio; debeturq; est quoq; punctum cubicum, quod ad læuam primùm occurrebat. Cæterum à diuisione potius initium deductum fuit; quàm à radicis eductione, cum coefficiens principaliùs diuidat, quàm ipsius lateris cubus, vel lateris quadratum.

Compendiosius, quæ tradita sũt absolui posse declaratur.

Compendiosiùs autem hoc modo, fit æquatio altera.

1 C * 95680 R = 1149888

1
1 1 4 8 8
9 5 6 8 0
1 9 2 0 8 8
6
1 9 1 4 8
1 2
1 9 1 3 6 8
8
1 9 1 3 6 0
1 9 1 3 6 0
0 0

Prætermisso primo puncto, subtraho cubum ipsius 1, abs 1149; etenim primam lateris figuram dico esse 1, facta subtractione, remanet numerus 1148, iuxta quam ad dextram scribo sequentem numerum 88; vt fiat numerus 11488; ab hoc subtraho numerum productum ex multiplicatione 1, primæ figuræ in ipsum numerum radicum, nimirum 95680, remanetq; numerus 19208; cui appono postremam figuram 8, vt fiat numerus 192088.

Inuentio secundæ figuræ.

Ad indagandam secundam figuram, parò diuisorem hac arte; Sumo 3, nempe triplum quadrati primæ figuræ; deinde sumo 3, triplum eiusdem 1, primæ figuræ, & addo 3, triplum eiusdem 1, ad 3, triplum quadrati ipsius 1; hac tamen conditione, vt triplum ipsius primæ figuræ,

col-

collocetur sic, vt antecat versus dextram vnius figuræ loco; itaut fiat numerus 33; cui obseruata eadem cautela antecessionis addo 95680, numerum radicū, vt fiat 96010, & hic numerus erit diuisor quæsitus, per quem nimirum diuidendus est numerus 192088, facta diuisione fit quotiens 2, & est secunda figura quæsita. Modo sumatur 3, triplum quadrati primæ figuræ 1, & ducatur in 2, secundam figuram fit 6, & subducatur à 192088, hac lege, vt collocetur sub antepenultima, nempe 0, & remanebit numerus 1914; iuxta quem scribatur sequens figura 8; vt fiat 19148; Sumatur autem 3, triplum primæ figuræ, & ducatur in 4; quadratum secundæ figuræ, & fiet numerus 12, quo subtracto à 19148, remanet 19136; huic apponatur postrema figura 8, vt fiat numerus 191368, de quo detrahatur 8, cubus secundæ figuræ, & remanebit 191360; nunc autem ducatur numerus 95680, in 2, secundam figuram, & fiet numerus 191360; quo detracto de ipso 191360, superiùs seruato, remanet 0.

Methodi explicandi æquationem inter C — R, & N.

Methodus Girardi.

Proponatur æquatio 1 C = 8 R + 10472. Partes aliquotæ numeri absoluti disponantur, vt vides; nempe, vt binæ contrapositæ si inter se ducantur, efficiant 10472. *Girardi methodus explicatur.*

1 —	10472	14 —	748
2 —	5236	17 —	616
4 —	2618	22 —	476
7 —	1496	34 —	308
8 —	1309	44 —	238

De-

Deinde vtraq; æquationis pars diuidatur per 1R, & fiet æquatio 1 Q $=$ 8 $+ \frac{10472}{1R}$. Hoc est 8, additus vni ex partibus aliquotis ipsius numeri 10472; constituit quadratum lateris, seu 1R; ea verò est eligenda pars aliquota, cui additus 8; facit quadratum alterius partis coefficientis correlatæ, vt in nostro exemplo reperiemus partem ipsam esse 476, & 1R, pretium erit 22.

Generalis Methodus Vietæ.

Vietæ methodus proponitur. E *Dato in numeris cubo affecto multa solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.*

Si proponatur cubus negatè affectus, vt exempli gratia 1 C $-$ 16 R $=$ 46080; non dissimili modo procedendum erit, ac in analysi cubi affirmatè affecti solùm inter se differunt æquationes, quòd in istarum analysi dum diuisio instituitur; coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuisorum differentia attendi debet; Secus autem in illarum æquationum analysi, in quibus, dum cubus affirmatè afficitur, summa debet attendi. Præterea solidum factum, dum singularia latera ducuntur in idem coefficiens planum desinens sub sede ipsius coefficientis, addendum est negatè affecto cubo, vel auferri debet (in idem enim recidit) à solidis ablatitijs; cum tamen in cubo affirmatè affecto opposito modo procedendum esset, siquidem subducebatur cubo affirmatè affecto, vel addebatur solidis ablatitijs. Hæc autem omnia in sequenti paradigmate intueri licebit. Vt in eductione primi lateris, idem est addere 48, solidum à latere primo, in coefficiens planum, addere inquam ad 46080; ita tamen, vt desinat quemadmodum vides sub puncto, vbi coefficiens consistit; & ex aggregato subducere 27, cubum lateris primi; idem est, ac 48, subducere ex 27, assumente duas cifras: sic etiam in extractione secundi lateris; nam si 96 solidum à latere secundo in coefficiens planum, subduxeris ex

19656,

19656, remanet 19560, quo subtracto ex 19560, nihil remanet; si idem numerus 96, addideris cubi affecti resoluendi reliquo, fiet 19656; à quo si subtraxeris 19656 summam ablatitiorum, nihil pariter remanebit; hoc ex adiuncto paradigmate conspicitur; quod etiam in alio subsequenti, analyseos cubi acephali licebit obseruare. Erat autem oppositus processus in æquatione, in qua cubus afficiebatur adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere; cum enim proponeretur 1 C + 34 R = 14714455: erat cubus lateris primi 8; & 68, erat solidum à latere primo in coefficiens planum; hoc autem, vel addebatur 8, assumenti quatuor cifras, & summa 80068, auferebatur à 14714455, desinente tamen numero 80068, sub puncto, vbi coefficiens consistit; vel subtrahebatur, eadem seruata lege, à numero 14714455, cubo affecto resoluendo; vtrouis enim modo opereris, habebis 6707655, pro reliquo resoluendi cubi affecti: quod autem de primo latere diximus, illud quoq; de secundo omnino est intelligendum, &c.

Paradigma analyseos cubi affecti multa solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.		1 6	Subiaterale			
		. .	Tot puncta laterum simplicium, quot cuborum		.	.
	4 6	0 8 0		R.	3	6
				Q.	9	36
	.	.	Puncta cubica.			
Solida prostaphæretica. Ablatitium.	2 7		Cubus lateris primi.			
Solida prostaphæretica. Addititium.		4 8				
Excessus solidi ablatitij.	1 9	5 2				
Reliquum cubi affecti resoluendi.	1 9	5 6				

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		1 6	
Reliquum cubi affecti resoluendi.		1 9	5 6 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	2	7	
	Triplum lateris primum.		9	
Differentia diuisorum.		2	7 7 4	
Solida ablatitia.		1 6	2	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		3	2 4	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			2 1 6	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		1 9	6 5 6	
Solidum addititium.			9 6	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		1 9	5 6 0	

Qua arte id compendiosius assequi valeamus.

Compendiosiùs elicitur radix propositæ æquationis non dissimili modo, ac superiùs fecimus agentes de analysi æquationis, in qua cubus affirmatè afficitur; solùm illud interest, quod iam adnotauimus, vt differentia attendatur in diuisione instituenda; differentia inquam coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuisorum; cum in æquatione cubi affirmatè affecti, summa esset attendenda; cætera verò sunt obseruanda, quæ iam explicuimus agentes de methodo Vietæa.

Eadem æquatio cōpendiosiùs explicatur.

Dico igitur latus cubicum numeri 46; esse 3, huius cubus est 27, quo subtracto ex 46, remanet 19; huic annectantur duæ sequentes figuræ 08, vt fiat 1908, huic addatur 48, numerus factus ex 3, prima figura in 16; numerum

ra-

radicum, & fiet 1956; huic annectatur 0, vt fiat 19560; modo ad indagandam secundam figuram, paro diuisorem hoc arte; sumo triplum quadrati primæ figuræ, & est 27; deinde sumo triplum eiusdem primæ figuræ, scilicet 9; annecto hanc figuram illis, vt fiat 279, additionem enim instituo adhibita cautela, vt antecedat vnius figuræ spatio; ex 279; subducto 16, numero radicum, facta subtractione ea lege, vt vides (si cubus esset affirmatè affectus institueretur additio) fit 2774, diuisor, per quem si diuidatur 19560, fit quotiens 6; & secunda figura: modo duco 6, in 16, numerum radicum, & fit 96, numerus; qui additus ad 19560, (si cubus esset affirmatè affectus, auferretur) & fit 19656; à quo subducto 162, solido à latere secundo, siue secunda figura, in triplum quadratum lateris primi, & remanet 3456; à quo subtracto 324, numero producto à quadrato lateris secundi, in triplum latus primum, remanet 216; à quo subtracto 216, cubo ex 6, nihil remanet, &c.

Indagatio secunda figura.

	3 6
1C — 16R	= 46080
	27
	1908
27	48
9	
279	19560
16	96
	19656
Diuisor 2774	162
	3456
	324
	216
	216
	0 0

Paradigma analyseos cubi acephali sub latere affecti.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	1 1	6 6 2	0	
			· · ·	
Cubus resoluendus mutilus.	0	3 5 2	9 4 7	
	·	QR.	QR.	
	C 1	C 1 1	C 1 1 1	
Solida prostaphæretica. { Addititium.	3 4	9 8 6	0	A latere primo in coefficiens planum.
Solida prostaphæretica. { Ablatitium.	2 7			Cubus lateris primi.
	7	9 8 6	0	
Reliquum restituti resoluendi mutili cubi.	8	3 3 8	9 4 7	

	o	o o
R	3	4
Q	9,	16
C	27,	64

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens planum.	1	1 6 6	2 0	
			· ·	
Reliquum resoluendi cubi affecti	8	3 3 8	9 4 7	
		·	·	
Diuisorum pars inferior. { Triplum quadratum lateris primi.	2	7		
Diuisorum pars inferior. { Triplum latus primum.		9		
Excessus diuisorum inferiorum.	1	6 2 3	8 0	
Solida ablatitia.	3 0	8		A latere secundo in triplum quadratum primi.
	1	4 4		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		6 4		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	1 2	3 0 4		
Solidum addititium.	4	6 6 4	8 0	A latere secundo in coefficiens planũ.
Excessus ablatitiorum.	7	6 3 9	2 0	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	6	9 9	7 4 7	

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur, & fit.

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	116	620	
Reliquum resoluendi cubi affecti		699	747	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	346	8	
	Triplum latus primum	1	02	
Excessus diuisorum inferiorum.		231	200	
Soli da ablatitia.		1040	4	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		9	18	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			27	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		1049	607	
Solidum addititium.		349	860	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitius æqualis reliquo resoluendo cubo.		699	747	

	o	·	·
R	3	4	3
Q	11	56	9
C	39	304	27

Quoniam igitur aliquando contingit, vt coefficiens planum pluribus abundet binis figuris, quàm cubus negatè affectus sub latere ternis, quod est argumentum solidum afficiens maius esse resoluendo affecto negatè cubo. Hic cubus acephalus dicendus est; quasi capitis expers, postulat autem peculiarem analysim; quam vt instituamus oportet præponere mutilo proposito cubo, eam numeralium circulorum multitudinem; vt tot puncta cubica possint ei præfigi, quot quadratica plano coefficienti. Radix autem educta è plano coefficiente, tanquam quadrato,

Quando coefficiens planũ pluribus abundat binis figuris, quã cubus negatè affectus sub latere ternis.

drato, si cætera consentiant, sin minùs, proximè maior, constitui debet latus singulare primum ipsius resoluendi cubi negatè affecti; non immutata methodo quantum ad reliqua.

Ita planè in superiori Paradigmate, in quo 352947, cubus est multatus solido sub latere, & plano 116,620: est autem maius solidum 116620R, solido resoluendo 35294; quoniam coefficienti plano 116620, præfigi possunt tria puncta quadratica, solido verò 352947, duo tantùm puncta cubica: ob id solido 352947, resoluendo præpositus est numeralis circulus, & coefficienti sua sedes adijcitur. Initium autem operis desumitur, ab extractione radicis quadratæ, quæ lateri cubi resoluendi consentiat, vt etiam constat, in adiuncto Paradigmate.

Paradigma analyseos Cubi acephali sub latere affecti.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	1 5	4 5 3	0	
			. . .	
Cubus affectus resoluendus mutilus.	0	6 7 3	4 7 5	
	.	QR.	QR.	
	C I	C II	C III	
Solida prostaphæretica.	4 6	2 9 6	0	A latere primo in coefficiens planum.
	2 7			Cubus lateris primi.
Excessus addititij.	1 9	2 9 6		
Reliquum restituti resoluendi mutili cubi.	1 9	9 6 9		

	0	0	0
R. 3		9	
Q 9:		81	
C 27:		729	

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Coefficiens planum.	1	543	80	
Reliquum resoluendi cubi affecti	19	969	475	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratu lateris primi.	2	7		
Triplum latus primum.		9		
Excessus diuisorum inferiorum	1	246	80	
Solida ablatitia.	24	3		A latere secundo in triplum quadratum primi.
	7	29		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		729		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum	32	319		
Solidum addititium.	13	888	80	A latere secundo in coefficiens planũ
Excessus ablatitiorum.	18	430	20	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	1	539	275	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, & fit.

III. Eductio lateris singularis tertij.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.	154	380	
Reliquum resoluendi cubi affecti	1539	275	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi	456	3	
Triplum latus primum.	1	17	
Excessus diuisorum inferiorum.	103	150	
Solida ablatitia.	2281	5	A latere secundo in triplum quadratum primi.
	29	25	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		125	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	2310	875	
Solidum additium.	771	700	
Excessus ablatitius aequalis reliquo resoluendo cubo.	1539	275	

	o	o	o
R	3	9	5
Q	1521		25
C	59319:		125

Et

Explicantur hactenus dicta. Et ita dum proponitur æquatio 1 C — 154320 R = 1539275, fit 1 R, valor 395, numerus planè quæstioni satisfaciens; ab huius enim cubo 121128375, si auferatur 60956400, numerus factus per multiplicationem numeri 154320, in 395, remanebit 1539275: satisfacit igitur quæstioni, per quam proponebatur, numerum inuenire, qui ductus in sui quadratum diminutũ 154320, facit 1539275; hoc est, numerum inuenire, quo ducto in sui quadratum, & à producto ablato producto ex eodem in 154320, remaneat 673475. Quod si negatè affectus cubus, tot constet ternis figuris, quot planum coefficiens binis; interdum eo loci prorumpit, vt nisi Analysta rationem eius habuerit, non rarò in ipsa extractione radicis eludetur. Præstat eo casu, vt ab ipso plano coefficiente tanquam quadrato, eruatur sub congruente puncto radix; cuius cubus subintelligatur adiungi proposito cubo affecto, atq; adeo ex eo ita adaucto latus eliciatur, Illud enim erit, vel consentaneum, vel consentaneo proximè minus. Vt si proposita foret æquatio 1 C — 6400 R = 153000, ordinatis ad opus figuris iuxta Artis præcepta. Quoniam igitur radix quadrata numeri 64, est 8, cuius cubus est 512; qui additus ad 153, facit 665; at latere cubi 665, proximè maius est 9; sumetur latus 9, pro quæsita radice.

$$\begin{array}{cccccc} & & 6 & 4 & 0 & 0 \\ & & & & . & . \\ \hline 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Methodi explicandi æquationem inter R — C, & N.

Methodus Girardi.

Girardi methodus explicatur. Proposita sit æquatio 1 C = 124 R — 240. Disponantur partes aliquotæ, vt supra, &c. diuidatur vtraq; æquationis pars per 1 R, fit 1 Q = $124 - \frac{240}{1\,R}$;

hoc

hoc est, si à 124, numero R, auferatur pars aliqua aliquota numeri absoluti 240, nempe 24, remanet quadratum numeri 10, videlicet 100, cuius ℞ est 10; & altera pars coefficiens, correlata; itaq; 10, erit 1R pretium, & est maius latus: si verò à numero 124, subtrahamus 120, remanet 4, quadratum alterius partis, nempe 2; & 2, erit latus minus.

Generalis Methodus Vietæ.

E Dato in numeris solido sub latere, & data coefficiente plana magnitudine, affecto multa cubi, latus analyticè elicere.

Quando potestas negatur de homogenea sub gradu, latus est anceps; quamobrem æquatio adinuenta de duobus lateribus explicabilis est, atq; adeo Problemati duplex latus satisfacit; quorum vnius quadratum minus est triente datæ coefficientis planæ magnitudinis, alterum maius; ita vt si triplum solidum, quod est homogeneum comparationis, applicetur ad duplum plani coefficientis datæ magnitudinis, orietur longitudo maior radice minori, & minor radice maiori. *Vieta methodus generalis declaratur.*

Paradigma primum analyseos cubi auulsi à solido sub latere ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	6 4	6 8	Sublaterale.	•	•
		• •		R. 3	6
				Q 9 :	36
Solidum sublatere multatum lateris resoluendo cubo.	1 8 6	1 9 2		C 2 7 :	216
	•	Q R.			
	C 1	C 1 1			
Solidum restituens.	2 7		Cubus lateris primi.		
Solidum restitutum.	2 1 3	1 9 2			
	1 9 4	0 4	A latere primo in coefficiens planum.		
Excessus solidi restituti, reliquamue resoluendi cubi auulsi.	1 9	1 5 2			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior	Coefficiens planum.	6	468	
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		19	152	
Diuisorum pars inferior	Triplum quadratum lateris primi.	2	7	
	Triplum latus primum.		9	
Excessus diuisorum superiorum.		3	678	
Solida addititia		16	2	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		3	24	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			216	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum addititiorum.		19	656	
Solidum ablatitium.		38	880	
Excessus solidi ablatitij, æqualis residuo resoluendo cubo auulso.		19	152	

Ad indagãdam radicem maiorem.

Latus igitur vnum è duobus, de quibus æqualitas explicari potest, ipsumq; minus erit 36, si fuerit æquatio huiusmodi 6468 R — 1 C $=$ 186192. Si velimus autem radicem maiorem, applicemus 186192, solidum ad 36, & oriens planum 5172, compositum erit ex quadrato maioris, & rectangulo sub maiore, & minore. Idem etiam planum relinquitur, si ab 6468, auferatur 1296, quadratum ex 36.

Dico

Dico igitur maiorem radicem esse 1 R, eius quadratum est 1 Q, ducatur 1 R in 36, & fit 36 R, addantur, & fit summa 1 Q ✱ 36 R ═ 5172

Aequationis indagatio, ad inquirendam radicẽ maiorem.

18   324
18
———
144   5496
18   ℞ 5496
——— 18
324   ℞ 5496 — 18 latus maius.
   ℞ 5496 — 18
———
— ℞ 178704 ✱ 324
5496 — ℞ 178704
———
5820 — ℞ 7122816
7 ℞ 122816 — 648 Productum ex numero radicũ; seu coefficiente, in Radicis pretium.
———
5172

Paradigma primum analyseos cubi auulsi à solido sub latere ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	131	04	Sublaterale.
		..	
Solidum sublaterale multatum lateris resoluendo cubo.	155	529	
	.	QR.	
Solidum restituens.	C 1	C 1	Cubus lateris primi.
Solidum restitutum.	156	520	
	131	04	
Excessus solidi restituti reliquumue resoluendi cubi auulsi.	25	480	

	0	0
R.	1	2
Q	1	4
C	1	8

 II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	13104	
Reliquum resoluendi cubi auulsi		25480	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	3	
	Triplum latus primum.	3	
Excessus diuisorum superiorum.		12774	
Solida ablatitia.		6	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		12	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum additiorum.		728	
Solidum ablatitium.		26208	A latere secundo in coefficiens planum
Excessus solidi ablatitij aequalis residuo resoluendo cubo auulso.		25480	

Dum itaq; proponitur aequatio $13104 R - 1 C = 155520$ fit $1 R$, pretium 12, & satisfacit questioni.

Paradigma secundum cubi auulsi à solido sub latere, ad inueniendum radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	1	310	4	
Solidum sub latere multatum lateris cubo acephalum.	0	155	520	
Solidum restituens.	1			Cubus lateris primi.
Solidum restitutum.	1	155	520	
Solidum principale minuendum.	1	310	4	A latere primo in coefficiens planum.
Excessus solidi principalis, reliquumue resoluendi cubi.		154	880	

Sublaterale. 0

R	1
Q	1
C	1

II. Edu.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	131	04
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		154	880
Diuisorũ pars superior.	Triplum quadratum lateris primi.	3	
	Triplum latus primum.	3	
Excessus diuisorum inferiorum.		198	960

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	13	104
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		154	880
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	30	0
	Triplum latus primum.		30
Excessus diuisorum inferiorum.		17	196

	o	o
R 1	0	8
Q 100 :		64
C 100 :		512

Solida ablatitia.	240	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
	19	20	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		512	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.	25	712	
Solidum addititium.	104	832	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo cubo.	154	880	

Ex

Ex Vieta hoc exemplum desumpsimus, in quo æquatio explicabilis est, de duplici latere, quorum vtrumq; in numeris exhibetur rationalibus; minoris radix est 12, maior autem est 108; quemadmodum in superiori Paradigmate cernere licet.

Expeditiùs sic. Sit æquatio 13104R—1C = 155520

Sumo latus cubicum numeri vsq; ad primum punctum scilicet 155; illudq; dico esse 1, cuius cubus est 1, quem scribo sub puncto, & latus 1, noto superiùs; ducta linea addo 1, cubum primi lateris ad 155, vt fiat 156; cui annecto 52, sequentes figuras, vt fiat numerus 15652, à quo subtraho 13104, numerum factum ex multiplicatione numeri 13104, in 1, primam figuram, & remanet 2548; huic annecto 0, postremam notam propositi numeri resoluendi, & fit 25480.

```
      1 2
155520
  .   .
  1
-----------
1 5 6 5 2
1 3 1 0 4
-----------
2 5 4 8 0
    6
-----------
2 6 0 8 0
    1 2
-----------
2 6 2 0 0
        8
-----------
2 6 2 0 8
2 6 2 0 8
-----------
0       0
```

Secunda figura indagatur.

Ad indagandam autem secundam figuram, siue secundum singulare latus, scribatur numerus radicum 13104; sumatur triplum quadrati primæ figuræ, & est 3, noteturq; sub ante penultima figura; deinde sumatur triplum eiusdem 1, constituaturq; sub penultima: fiat subtractio, remanet 12774. Hæc autem constitutio figurarum, non est casu facta, vt tyronibus videtur, sed ratione, vt patet, ex ijs, quæ superiùs demonstrauimus: est autem 12774, diuisor

```
1 3 1 0 4
    3 3
-----------
1 2 7 7 4   Diuisor.
```

diuisor

uisor, per quem diuidendus est numerus 25480; fit autem quotiens 2; estq; secunda figura quæsita. Sumatur triplum quadrati 1, primæ figuræ, & est 3, ducatur in 2, secundam figuram, & fit 6, scribatur sub 4, antepenultima figura, & fit 260; huic si adiungatur 8, penultima figura, fit 2608. huic autem additur 12, productum à 3, triplo 1, primæ figuræ, in 4, quadratum 2, secundæ figuræ, & fit 2620, cui annectatur 0, postrema figura, vt fiat 26200; cui addatur 8, cubus secundæ figuræ, vt fiat 26208: ab hac autem summa oportet subtrahere 26208, numerum productum à 13104, numero radicum, in 2, secundam figuram, & remanet 0: erit 1R, valor 12.

Vt autem indagemus radicem maiorem, diuidatur 155520, per 12, latus minus, & prosilit in quotiente 12960; numerus etiam, qui repetitur, subducto 144, quadrato ipsius 12, remanet enim 12960; hic autem numerus æqualis est quadrato lateris maioris, plus producto maioris in minus: Itaq; si dicamus maius esse 1R, eius quadratum est 1Q; si verò ducamus 1R, in 12, fit 12R; erit igitur 1Q + 12R = 12960; huius autem æquationis radicem comperiemus esse 108.

Si proposita fuisset æquatio 13104R — 1C = 155520: Instituitur etiam analysis ad radicem indagandam; quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate; est autem cubus acephalus, præposita verò nota 0155520; factaq; signatione per puncta instituetur analysis.

Fiat signatio per puncta, vt vides constituatur latus singulare primum 1, cuius cubo 1, addito ad numerum resoluendum fit summa 1155520; cui subscripto 13104, numero facto ex 13104, in 1, primum singulare latus, & facta subtractione illius ab hoc, remanet 154880. *Huius æquationis analysis instruitur compendiosius.*

Ad indagandam secundam figuram, sumatur triplum primæ, & est 3; deinde sumatur triplum eiusdem 1, & colloceтur, vt vides, fit 33; subscribatur 13104, coefficiens, & subtracto 13104, ab 33, adiunctis numeralibus circulis 000, remanet 19896; per quem diuisis 1548, fit quotiens

tiens o, & o, est secunda figura, noteturq; in radice 1000 sibi consentaneo, supra punctum secundum sibi addictum.

		1 0 8	
1 3 1 0 4 R — 1 C =		0 1 5 5 5 2 0	
3 0 0	3 0	1	
8	6 4		
2 4 0 0	1 9 2 0	1 1 5 5 5 2 0	
		1 3 1 0 4	
3		1 5 4 8 8 0	
3		1 0 4 8 3 2	8
1 3 1 0 4		2 5 9 7 1 2	8
		2 4 0 0	
1 9 8 9 6 primus diuisor.			64
		1 9 7 1	8
3 0 0		1 9 2 0	
3 0			512
		5 1 2	
1 3 1 0 4		5 1 2	13104
			8
1 7 1 9 6 secundus diuisor.		0	104832

Modo indagetur tertia figura non dissimili artificio parando nimirum primo diuisorem; scilicet sumpto quadrato triplo primi lateris, & triplo primo latere, notatisq; vt fiat 30300, ab hoc ablato 13104, remanet 17196, numerus diuisor, per quem diuiso 154880, fit quotiens 8, &c.

Sit proposita æquatio 264 R — 1 C = 1600 etsi prima facie radix duabus constare figuris videatur; vnica tamen figura constat: est igitur 8, huius cubus est 512, quo addito ad 1600, fit 2112; à quo subtracto 2112,

1 6 0 0	
5 1 2	
2 1 1 2	
2 1 1 2	

nume-

numero facto ex 264, in 8, nihil remanet; erit autem 8. latus minus: habebitur maius methodo superius explicata.

Proposita sit æquatio 4 3 8 R — 1 C = 3 2 1 3 & non dissimili modo reperiemus latus minus esse 9, maius reperietur vt supra.

9
3 2 1 3
7 2 9
3 9 4 2
3 9 4 2

Hoc modo dicebamus in nostro opere Algebrico, quod elapsis annis Typis mandauimus, si sit æquatio 4 8 R — 1 C = 7 2, latus quæsitum esse 6, cuius cubum 216; addo numero absoluto 72, vt fiat 288, de quibus detraho 288, productum ex 6, latere inuento in 48, numerum radicum, & remanet 0, quoniam autem est æquatio amphibola, proinde duplicem habet radicem. Alteram autem sic inuenio; à numero radicum, puta 48, aufero 36, quadratum inuentæ radicis 6, & remanet 12; aut numerum 72, diuido per 6, radicem inuentam, & fit, quotiens 12, vt supra, quo facto sic procedo: quæsita ℞ sit 1 R, cuius quadrato, nempè 1 Q, addo 6 R, numerum productum ex 1 R, in 6, priùs inuentam radicem, & fit summa 1 Q + 6 R. Quoniam autem numerus priùs inuentus, & seruatus, nempe 12, componitur ex quadrato secundæ radicis quæsitæ, & numero producto ex eadem radice, in primam radicem inuentam multiplicato; ob id erit 1 Q + 6 R = 12: cuius æquationis explicatæ reperitur radix ℞ 21 — 3, & secunda radix quæsita.

6
48 R — 1 C = 7 2
2 1 6
2 8 8
2 8 8
0 0

SCHOLION.

IN hac æquatione contingit non raro opus esse deuolutione, de qua supra egimus; & sæpè intelligendam esse præpositam numero notam o: sed de Aequatione Amphibola, plura in Algebra Speciosa. Cæterum per modum alterum, &c. Numerus absolutus obiecto signo — assumat +, vt transmutetur æquatio in hanc C — R = N. Secundo à quadrato lateris per transmutatam æquationem inuenti subtrahatur numerus Radicum, & residuum seruetur. Tertiò à quadrato dimidij lateris inuenti per æquationem transmutatam subducatur residuum seruatum, vel ablatum, à dimidio lateris inuenti per æquationem transmutatam summa, vel residuum dabit radicis valorem.

Methodus explicandi æquationem inter C + Q, & N.

E Dato in numeris cubo affecto adiunctione solidi sub lateris quadrato, & data coefficiente longitudine, latus analyticè elicere.

Huius methodi explicatio.

Quid intersit inter genesim cubi puri, & affecti per adiunctionem solidi sub lateris quadrato, &c.

Inter genesim cubi puri, & huius affecti cubi, hoc interest, quòd in hac quadratum lateris singularis primi ducendum est in coefficientem longitudinem: deinde verò latus secundum in duplum rectangulum sub latere primo, & coefficiente longitudine; atq; demum eiusdem secundi lateris quadratum per ipsam quoq; coefficientem longitudinem multiplicandum est. Hæc enim huius affecti cubi genesis ordinata, addit genesi cubi puri, superiùs explicatæ.

Quo pacto procedendũ in hoc analysi.

Vt autem ex huiusmodi cubo affecto eruantur latera; non secus, ac in præcedentibus adnotauimus, sedes vnitatum singulares cubos metientium constituendæ sunt, atq; designandæ sunt punctis subtus collocatis; & quot fuerint sedes cuborum, punctaue; tot etiam quadratorum

sedes,

ſedes, per binas nimirum alternas figuras (ſiquidem coefficiens eſt ſubquadratica) debent deſuper collocari. In vltima verò ſede quadratorum, prima tamen à læua ad dextram procedendo ipſa coefficiens conſiſtet, ac proinde ſi pluribus figuris, quàm vna conſtet, reliquæ in anteriora prorumpent, quemadmodum in ſequenti paradigmate videbimus. Vt autem in analyſi puri cubi; ita in hoc elicientur latera: hoc animaduerſo tantùm, quod ipſa coefficiens eſt è numero diuiſorum, ſeu inter diuiſores recenſetur; præterea poſt eductionem lateris ſingularis primi, planum ſub coefficiente, & duplo ſingularis lateris primi, eam eſt ſedem occupaturum, quæ in anteriora proxima eſt à puncto, in quo coefficiens ipſa conſiſtit. Hoc autem planum expletionis nuncupatur.

Coefficiens inter diuiſores recenſetur.

Planum expletionis quid.

Quadrata verò laterum elicitorum in coefficientem ipſam, & latera in expletionis planum ducuntur; deſinere verò debent ſolida facta ſub congrua ſede, qualem videlicet multiplicationis ratio poſtulat, & hæc debent auferri cum reliquis ſolidis ex affecto cubo.

Quadrata elicitorum latera in coefficiẽtem ducuntur, & latera in planum expletionis.

Cæterum coefficiens in ſuccedentia loca quadratorum, præeunte ſemper ſuo expletionis plano ſubijcitur ordinatim, & diuiſores etiam ſubtus reliqui moueri debent, non diſſimili modo: ſed hæc omnia faciliùs deprehendentur ex infra poſito paradigmate, in quo cernes obſeruata præcepta iam tradita; fit enim figurarũ ſignatio, quemadmodum in analyſi puri cubi dictum eſt; adnotantur etiam deſuper quadratorum ſedes per puncta illa, quę quadratica dicuntur; extrahitur latus cubicum, vſque ad primum punctum ad læuam, & ad cubum extracti lateris, puta ad 216, additur 432, ſolidum à quadrato lateris primi, in coefficientem; ſumma verò ſubducitur numero reſoluendo 311296, vt remaneat 52096: fit autem expletionis planum 144, à coefficiente 12, in 12, duplum lateris primi; & cætera fiunt, quæ facilè ex paradigmate diſcerni poſſunt.

Paradigma analyseos cubi affecti adiunctione solidi, sub coefficiente longitudine, & lateris quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1 2		Subquadratica
	.	.	Tot sedes punctaue quadratorum, quot cuborum. R 6, 4; Q 36, 16; C 216, 64. Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
Cubus affectus resoluendus	3 1 1	2 9 6	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 11	
Solida ablatitia	2 1 6		Cubus lateris primi.
	4 3	2	Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum ablatitiorum.	2 5 9	2	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	5 2	0 9 6	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	1	4 4	
	Coefficiens longitudo.		1 2	
Cubi affecti resoluendi reliquum.		5 2	0 9 6	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	1 0	8	
	Triplum latus primum.		1 8	
Summa diuisorum.		1 2	4 1 2	
Solida ablatitia facta diuisoribus.	Inferioribus & praecipuis.	4 3	2	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
		2	8 8	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			64	Cubus lateris secundi.
	Superioribus.	5	7 6	A latere secundo in planum expletionis.
			1 9 2	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum auferenda, aequalis reliquo resoluendi Cubi.		5 2	0 9 6	

Sic

Sit æquatio $1C + 12Q = 311296$

	216
	952
	432
	52096
108	432
18	
144	889
12	288
Diuisor 12432	6016
	64
	5952
	576
	192
	192
	00

Compendiosiùs hoc modo. Dico latus cubicum numeri 311, esse 6, cuius cubus est 216, subtractus à 311, relinquit 95; cui annexa sequente figura 2, fit 952. Ad indagandam secundam figuram paro diuisorẽ hac arte. Scribo 108, triplum quadrati ex primo latere 6, & ei addo 18, triplum eiusdem lateris ea lege, vt antecedat vnius figuræ spatio, & fit 1098; huic addo 144, planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi, & fiet 1224; huic addo coefficientem longitudinem, antecedentem vnius figuræ spatio, & fit 12432; per quem si diuidatur 52096, fit quotiens 4: modo subduco à 520, solidum à latere secundo 4, in triplum quadratum lateris primi 6, nempe 432, & remanet 88; huic annectatur 9, sequens figura, vt fiat 889; à quo subtrahatur 288, solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum, & remanet 601; huic annectatur sequens figura 6, & fit 6016; à quo subducto 64, numero cubo secundæ figuræ, & remanet 5952; à quo subtrahatur 576, soli-

solidum à latere secundo in planum expletionis, & remanet 192, à quo subtrahatur 192, solidum à quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, & nihil remanet. Dicemus itaq; radicem quæsitam esse 64.

Quando cubus potius afficit, quàm afficitur.

In sequenti secundo paradigmate cernere licet æquationem etiam inter Q, C, & N. Verùm in hac æquatione solidum maius est cubo; quamobrem cubus potius afficit, quàm afficiatur; quam ob causam supra pagina 195, dicebamus quadratum potius afficere quàm affici. Deuolutione tamen opus est ad hanc æquationem explicandam, propterea quod à numero solidorum subtractio fieri non potest.

Paradigma aliud.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	8	4	Subquadratica.	0	0
		.	Tot sedes, punctaue quadratorum, quot cuborum.	R 2	4
Cubus affectus resoluendus.	6 2	2 0 8		Q 4	16
				C 8	64
	.	QR.			
	C 2	C 18			
Solida ablatitia.	8		Cubus lateris primi.		
	3 3	6	Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.		
Summa solidorum.	4 1	6			
Reliquum resoluendi affecti cubi.	2 0	6 0 8			

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	3	3 6	
			8 4	
			.	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		2 0	6 0 8	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi	2	9	
	Triplum latus primum.		6	
Summa diuisorum.		4	6 0 4	
Solida ablatitia facta à diuisoribus.	Superioribus	1 3	4 4	A latere secundo in planum expletionis.
		1	1 4 4	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
			6 4	Cubus lateris secundi.
	Inferioribus		9 6	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		4	8	A latere secundo in triplum quadratum primi.
Summa solidorum auferenda æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		2 0	6 0 8	

Sæpè sæpiùs contingit, vt coefficiens sub gradu magnitudo in anteriora producatur vltra nimirum ipsum cubum affectum, vel eo loci saltem, vt cum ipsa sit è diuisoribus, ab affecto cubo auferri non possit. Hoc autem arguit cubum non tàm affici, quàm afficere; quoniam est minor afficiente solido. Coefficiens proinde ad succedentia quadratorum loca, seu puncta quadratica, desuper adnotata ordine reuocari debet, donec sit diuisioni locus; ab hoc autem præstat operis initium desumere obseruata homo-

Nota. Quando cubus non tàm afficitur, quàm potius afficit. & quare.

homogeneorum lege, vt inferiùs dicam. Quot autem subgradualibus punctis coefficiens retrocedet, tot puncta cubica subtus delebuntur, à quibus alioquin operis initium desumendum fuisset, nisi videlicet fuisset opus deuolutionem facere. Ita si sit æquatio 12320Q + 1C = 7110144. Numerus 7110144, est cubus adiunctus solido sub lateris quadrato, dataq; longitudine 12320; est autem solidum cubo maius, vt situs coefficientis indicat, quæ in anteriora prorumpit; quamobrem deuolui debet in proximum punctum quadraticum sequens, deleto puncto cubico ad læuam primùm occurrente, operis initio desumpto potius à diuisione, quàm à radicis extractione; itaut solidum per longitudinem cum diuidatur, quotiens, seu quod ex diuisione prouenit, non intelligatur radix, sed quadratum, quod est homogeneorum legem obseruare, quod ex adiuncto paradigmate quisq; conijciet: in quo numerus affectus resoluẽdus est 1110144; At verò suprapositus numerus est coefficiens longitudo, estq; 12320; constitutis autem desuper sedibus quadraticis, vides coefficientem iam dictam subquadraticam produci vltra ipsum numerum cubum; quamobrem deleto puncto cubico primùm ad læuam occurrente, fit retrocessio coefficientis ad sequens punctum quadraticum; his autem ita dispositis, & reperto latere primo, quadratum eius ducitur in coefficientem magnitudinem; productum autem 49280, notatur, vt desinat sub puncto, vbi coefficiens per retrocessionem deuenit, atq; consistit; illiq; subijcitur 8, cubus eiusdem lateris: sub puncto tamen quod cubi est sedes, facta additione, summa 49360, subtrahatur à numero resoluendo, vt remaneat numerus 2174144; deinde proceditur ad indagandam secundam figuram ad eum modum, quo ex adiuncto cernitur paradigmate.

Exemplo res declaratur.

Solidũ cum diuiditur per longitudinem coefficientis hic intelligitur oriri quadratũ, non radix. Hoc autem est legẽ homogeneorũ obseruare prout ad præsens attinet.

Para-

Paradigma, cum solidum affectionis sub quadrato maius est Cubo.

I. Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo.	123	2 0		Subquadratica.
		. .	.	Puncta quadratica.
Cubus resoluendus.	7	110	144	
	.	QR.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 31	C 11	

Quoniam autem coefficiens sub quadratica longitudo extra figuras afficientis cubi producitur; ideo fit deuolutio in sequens punctum quadraticum, deleto quoq; puncto cubico primum ad læuam occurrente.

II. Eductio lateris singularis primi post deuolutionem.

Coefficiens longitudo.	1230	0	
		. .	
Cubus afficiens resoluendus.	7110	144	
	.	QR.	
	C 1	C 12	
Solida ablatitia.	4920	0	A quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
	8		Cubus lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum.	4936	0	
Reliquum resoluendi afficientis Cubi.	2174	144	

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8	64

 III. Edu-

III. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior, eaq; præcipua.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.		492	80	
	Coefficiens longitudo.		12	320	
Cubi afficientis resoluendi reliquum.		2	174	144	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		1	2	
	Triplum latus primum.			6	
Summa diuisorum.			506	380	
Solida ablatitia facta à diuisoribus.	Superioribus.	1	971	2 8	A latere secundo in planum expletionis.
			197	120	A quadrato lateris secundi in coefficientem.
	Inferioribus.		4	8	A latere secundo in triplum quadratum primi.
				96	A quadrato lateris secundi in triplũ latus primum.
				64	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum auferenda æqualis reliquo resoluendi afficientis cubi.		2	174	144	

Sit proposita superior æquatio 12320Q + 1C = 7110144 (with 2 and 4 written above). Vide in adiuncto paradigmate, quo pacto radix extrahatur; congruit enim hæc extractionis ratio superiori Vietææ; solùm ab ea differt, quòd compendiosiùs, & clariùs rem ipsam absoluit.

Diui-

$12320Q + 1C = 711014\overset{4}{4}$

Diuisor ad indagandam secundam figuram paratur non dissimili modo, ac in superioris methodo: breuitatis causa nos hic explicationem lubet præterire; cum omnia ex se liquido constare ex supra dictis videantur.

```
      2      4
7 1 1 0 1 4 4
4 9 2 8 0
      8
-------------
4 9 3 6 0
2 1 7 4 1 4 4
-------------
1 9 7 1 2 0
  1 9 7 1 2 0
      4 8
        9 6
          6 4
-------------
2 1 7 4 1 4 4
-------------
7 1 1 0 1 4 4
      8
-------------
7 1 0 2 1
4 9 2 8 0
-------------
2 1 7 4 1 4
1 9 7 1 2 0
-------------
  2 0 2 9 4 4
  1 9 7 1 2 0
  -----------
    0 5 8 2 4
      4 8
    ---------
      1 0 2 4
        9 6
        -----
        0 6 4
          6 4
        -----
          0 0
```

Methodus explicandi æquationem inter $C - Q$, & N.

E Dato in numeris cubo affecto multa solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.

Eadem est ratio procedendi ad indagandā radicē cubi negatè affecti. Est eadem procedendi ratio ad indagandam radicem cubi negatè affecti sub quadrato, ac est in eruenda radice ex cubo affecto affirmatè. Solùm id quidem discriminis intercedit, quòd hìc in diuisionibus attenditur ipsius coefficientis longitudinis, ac regularium in cubo puro diuisorum differentia; at in cubo affecto affirmatè, debebat eorundem summa attendi; vt igitur in cubo per affirmationem affecto ad summam diuisorum debebat applicatio fieri; hic ad eorundem differentiam fieri debet; *Discrimen.* Hoc insuper intercedit discriminis, quòd cum elicita singularia latera, in idem coefficiens planum ducuntur, ipsa verò latera in expletionis planum (est autem planum expletionis, quod fit à coefficiente in duplum lateris primi, quemadmodum supra dictum est) solida inde facta, sub congrua sede desinentia, qualem nimirum exposcit multiplicationis ratio, addi debent proposito negatè affecto cubo, cum alioquin affirmatè affecto subducerentur, vel (quod idem est) auferuntur ablatitijs solidis, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate, in quo numerus 5760, est cubus affectus resoluendus, coefficiens est 14, vides autem solida prostaphæretica; & quidem solidum à lateris primo quadrato in coefficientem, puta 56, subtrahendum est ex cubo lateris primi, & differentia 24, subtrahenda ex 5760; deinde in eductione secundi lateris, diuisorum superiorum, & inferiorum differentia 686, numerus est, ad quem intelligendus est applicatus 3360, vt habeatur secundum singulare latus 4; ob id cum fuerit 1 C — 14 Q = 5760, fit 1 R valor 24.

Discrimen aliud.

Para-

Paradigma analyseos cubi affecti sub quadrato negatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	4	Subquadratica
		. .	Tot pũcta quadratica, quot cubica.
Cubus affectus resoluendus	5	760	
	.	QB.	Puncta cubica.
	C 1	C 11	
Solida prostaphæretica. Ablatitium.	8		Cubus lateris primi.
Solida prostaphæretica. Additium.	5	6	A lateris primi quadrato in coefficientem.
Excessus solidorum ablatitiorum.	2	4	
Reliquum resoluendi affecti cubi.	3	360	

o	o	Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue singularia.
R 2	4	
Q 4	16	
C 8	64	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Planum expletionis à coefficiēte in duplum lateris primi.		56	
		.	
Diuisorum pars superior. Coefficiens longitudo.		14	
		.	
Reliquum resoluendi affecti cubi.	3	360	
	1	2	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi. Triplum latus primum.		6	
Excessus diuisorum inferiorum.		686	
Solida ablatitia	4	8	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
Solida ablatitia		96	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
Solida ablatitia		64	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	5	824	
Solida additia.	2	24	A latere secundo in planum expletionis.
Solida additia.		224	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
Summa additiorum.	2	464	
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendo affecto cubo.	3	360	

Para-

Paradigma aliud analyseos cubi affecti sub quadrato negatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.			1 2		Subquadratica.
			.	. .	Tot puncta quadratica quot cubica. — 0 0 0 / R 1 2 / Q 1 4 / C 1 8 — Tot numerales circuli quot puncta cubica.
Cubus affectus resoluendus.		8	7 6 5	6 2 5	
		.	QR.	QR.	Puncta cubica.
		C I	C II	C III	
Solida prostaphaeretica.	Ablatitium.	8			Cubus lateris primi.
	Addititium.		1 2		A latere primi quadrato in coefficientem.
Reliquum resoluendi cubi.			8 8 5	6 2 5	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiēte in duplum lateris primi.	2 4		
	Coefficiens.	1	2	
Cubus resoluendus.		8 8 5	6 2 5	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratū lateris primi.	3		
	Triplum latus primum.	6		
Excessus diuisorum inferiorum.		1 0 4	8	
Solida ablatitia.		6		A latere secundo in triplum quadratum primi.
		2 2		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		8		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		7 2 8	7 2 8	
Solida addititia.		4 8		A latere secundo in planum expletionis.
		4	8	A quadrato lateris secundi in coefficientem.
Summa addititiorum.		5 2	8	
Residuum auferendum.		6 7 5	2	
Reliquum resoluendi cubi.		2 1 0	4 2 5	

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij.

	•	•	•	
R	1	2	5	
Q	1 4	4	25	
C	1 7	28	125	

Diuisorum pars superior	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	2	88	
	Coefficiens longitudo.		12	
Cubi resoluendi reliquum.		210	425	
Diuisorum pars inferior	Triplum quadratum lateris primi.	43	2	
	Triplum latus primum.		36	
Excessus diuisorum inferiorum.		4	068	
Solida ablatitia.		21	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		9	50	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			25	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		22	15	
Solida additiia.		14	40	A latere secundo in planum expletionis.
			300	A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa additiiorum.		14	705	
Excessus ablatitiorum aequalis residuo resoluendi cubi affecti.		210	425	

Dum itaq; proponitur $1C - 12Q = 1765625$: fit 1 R valor 125; vti perspicuum est.

Ple-

Sæpe sæpius accidit coefficientem longitudinē pluribus abundare simplicibus figuris, quā cubum negatè affectum sub quadrato ternis. Cubus acephalus quid.

Plerumq; contingit, vt coefficiens longitudo pluribus abundet simplicibus figuris, quàm cubus negatè affectus sub quadrato ternis. Id autem arguit solidum afficiens maius esse resoluendo cubo negatè affecto. Cubus autem acephalus hic appellatur. Vt autem analysis institui possit mutilo cubo præponetur ea numeralium circulorum multitudo; vt tot puncta cubica possint ei præfigi; quot simplices figuræ longitudini coefficienti. Prima verò longitudinis figura pergendo à læua ad dextram constituetur latus singulare primum, si cætera tamen consentiant; sin minùs figura proximè maior constitui potest, seruata eadem methodo quantum ad reliqua. Vt si proponeretur 1 C — 10 Q ⚌ 780; est quidem 780, cubus multatus solido sub quadrato, & coefficiente longitudine 10; est verò solidum 10 Q, maius solido 780; quoniam coefficiens longitudo constat simplicibus figuris duabus; solidum verò 780, vnico puncto cubico signatur; quamobrem solido 780, resoluendo præponetur numeralis circulus, & tunc demum sua sedes adijcietur coefficienti, cuius prima figura assumetur pro latere primo mutili cubi, &c.

Paradigma cum solidum maius est Cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	0	Subquadratica.
		. .	Puncta tot quadratica, quot cubica.
Cubus resoluendus acephalus.	0	784	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 1 1	
Solida prostaphæretica. Ablatitium.	1		
Solida prostaphæretica. Additium.	1	0	
Reliquum restituti mutili cubi.	0	0	
		784	

	0	0
R	1	4
Q	1	16
C	1	64

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.		2 0	
	Coefficiens longitudo.		1 0	
Reliquum restituti mutili cubi.			7 8 4	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Excessus diuisorum inferiorum.			1 2 0	
Solida ablatitia.		1	2	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
			4 8	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			6 4	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		1	7 4 4	
Solida addititia.			8 0	A latere secundo in planum expletionis.
			1 6	A lateris secundi quadrato in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum addititiorum.			9 6 0	
Excessus ablatitiorum aequalis proposito resoluendo cubo affecto			7 8 4	

Paradihma aliud cum solidum maius est cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.		1	2	Puncta cubica.
			. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.
Cubus resoluendus acephalus.		0	5 9 2	
		. C1	QR. C1	Puncta cubica.
Solida prosaphaeretica.	Ablatitium.	1		Cubus lateris primi.
	Addititium.	1	2	A lateris primo quadrato in coefficientem longitudinem.
Reliquum resoluendi mutili cubi.			5 9 2	

	o	o
R	1	4
Q	1	16
C	1	64

Tot numerales circuli, quot puncta cubica lateraue singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.		2 4	
	Coefficiens longitudo.		1 2	
Reliquum restituti mutili cubi.			5 9 2	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Excessus diuisorum inferiorum.			7 8	
Solida ablatitia.		1	2	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
			4 8	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			6 4	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		1	7 4 4	
Solida addititia.			9 6	A latere secundo in planum expletionis.
			1 9 2	A lateris secundi quadrato in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum addititiorum.		1	1 5 2	
Excessus ablatitiorum æqualis proposito resoluendo cubo.			5 9 2	

Quando coefficiens prorumpit, & deludat Analistā.

Quòd si affectus negatè cubus, de cuius resolutione agitur, tot constet ternis figuris, quot longitudo coefficiens singulis; accidit tamen aliquando eo prorumpere coefficientem, vt nisi quis cautè eius rationem habeat, & aduertat, non rarò deludatur in ipsamet exquirenda radice. Pręstat tunc ipsius coefficientis longitudinis cubo, vt intelligatur affectus propositus cubus augeri; & ex ita adaucto latus eruatur: propterea quod aut illud consentaneum erit, aut consentaneo proximè minus. Si verò la-

tus

tus ſic ſumptum duabus figuris conſtet; argumento eſt, cubi acephali: ſitq; deuolutio in antecedentia ad leuam.

Propoſita ſit æquatio 1 C — 9 Q = 970. Quoniam igitur ſolidum 970, adiunctum cubo ex 9, facit ſolidum 1709; cuius latus, vt cubi, maius eſt, quam 9, conſtans nimirum pluribus figuris, quam vna; proinde ſit deuolutio in antecedentia; & eſt cubus acephalus; eius autem analyſis inſtituitur, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate. Perſpicuum enim eſt radicem huius æquationis eſſe 14.

Paradigma item analyſeos cubi acephali ſub quadrato affecti.

I. *Eductio lateris ſingularis primi.*

Coefficiens longitudo	9	Subquadratica.		
	. .	o	o	Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
		R 1	4	
Cubus acephalus reſoluendus.	9 8 0	Q 1	16	
.		C 1	64	

Coefficiens longitudo		9	
Cubus acephalus reſoluendus.	0	9 8 0	
	.	.	Puncta cubica.
Ablatitium.	1		Cubus lateris primi.
Addititium.		9	A lateris primi quadrato in coefficientem
Reliquum reſoluendi cubi.		8 8 0	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	1	8	
	Coefficiens longitudo.		9	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		8	8 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	3		
	Triplum latus primum.		3	
Excessus diuisorum inferiorum.		1	4 1	
Solida ablatitia.		1 2		A latere secundo in triplum quadratum primi.
		4	8	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			6 4	Cubus lateris secundi.
Summa ablatiorum.		1 7	4 4	
Solida additititia.		7	2	A latere secundo in planum expletionis.
		1	4 4	A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa addititiorum.		8	6 4	
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		8	8 0	

Si igitur proposita foret æquatio 1 C — 9 Q ═ 9 8 0, fieret 1 R, valor 1 4, numerus quæstioni satisfaciens. Si verò esset 1 C — 9 Q ═ 7 2 0, fieret 1 R, valor 1 2. Hoc eodem artificio vti licet in explicandis æquationibus affirmatè affectis; vt si esset 1 C + 6 Q ═ 4 3 2; quoniam cubus ex 6, est 2 1 6, qui subtractus de 4 3 2, relinquit 2 1 6; proinde dicemus 6, esse radicem quæsitam.

Para;

Paradigma item analyseos acephali cubi.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.		800		Subquadratica.
		.	.	Tot puncta quadratica quot cubica.
	0	703	125	
	.	QR.	QR.	
	C I	C II	C III	
Solida prostaphæretica. Ablatitium.	1			Cubus lateris primi.
Solida prostaphæretica. Additium.		80		A lateris primi quadrato in coefficientem.
Reliquum resoluendi cubi.		503	125	

	5	0	0
R	1	2	
Q	1	4	
C	1	8	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi	160	
Diuisorum pars superior. Coefficiens longitudo.	8	0
Reliquum resoluendi cubi.	503	125
Diuisorum pars superior. Triplum quadratum lateris primi.	3	
Diuisorum pars superior. Triplū latus primum.	3	
Excessus diuisorum inferiorum.	162	0
Solida ablatitia	6	
	12	
	8	
Summa ablatitiorum.	728	
Solida adaititia	320	
	32	0
Summa addititiorum.	352	
Excessus.	376	
Reliquum resoluendi cubi.	127	125

III. Educ-

III. Eductio lateris singularis tertij.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis a coefficiente in duplum lateris primi.	1 9	2 0	
	Coefficiens longitudo.		8 0	
Reliquum resoluendi cubi.		1 2 7	1 2 5	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	4 3	2	
	Triplum latus primum.		3 6	
Excessus diuisorum inferiorum.		2 4	3 5 0	
Solida ablatitia.		2 1 6	0	A latere secundo in triplum quadratum primi
		9	0 0	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			1 2 5	Cubus lateris secundi.
Summa ablatiorum.		2 2 5	1 2 5	
Solida addititia.		9 6	0 0	A latere secundo in planum expletionis.
		2		A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa additiorum.		9 8		
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		1 2 7	1 2 5	

	0	0	0
R	1	2	5
Q	1 4 4,		25
C	1728,		125

Dum est æquatio 1 C — 12 Q = 703125: fit 1 R pretium 125.

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter $Q - C$, & N.

EDato in numeris solido sub quadrato, & data coefficiente longitudine, affecto multa cubi, latus analyticè elicere.

In hac æquatione solidum sub quadrato afficitur multa Cubi. Quando verò potestas negatur de homogenea sub gradu, latus est anceps; atq; adeo æquatio huiusmodi de duobus lateribus explicabilis est; quorum vnum minus est; duabus tertijs partibus ipsius coefficientis, alterum verò est maius; quemadmodum dum erat æquatio $R - Q = N$, duplex erat latus satisfaciens, vnum quidem maius dimidio coefficientis, alterum verò minus. Exemplis autem omnia dilucida reddemus potiùs, quàm verbis.

Quando solidum sub quadrato afficitur multa cubi.

Proposita igitur sit æquatio $54Q - C = 13600$: numerus 13600, est solidum sub quadrato affectum multa cubi. Cum autem negetur potestas de homogenea sub gradu, latus est anceps; & hęc ipsa ęquatio erit de duobus lateribus explicabilis, quorum vtrumq; Problemati satisfacit: vnum eorum minus est duobus tertijs partibus numeri 54, alterum autem maius.

Exemplis declaratur methodus ista.

Paradigma primum analyſeos cubi auulſi à ſolido ſub quadrato, ad inueniendam radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	4	Subquadratica.
		. .	
Cubus auulſus reſoluendus.	1 3	6 0 0	
	.	QR.	
	6 1	C11	
Solidum reſtituens.	8		Cubus lateris primi.
Solidum reſtitutum.	2 1	6 0 0	
Solidum principale minuens.	2 1	6	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.
Exceſſus reſtituti.	0		

Eſt igitur huius æquationis latus 20, illudq; minus è duobus, de quibus ęqualitas poteſt explicari, huius autem quadratum eſt 400: ad quod dum applicatur ſolidum 13600, oritur latudo 34; quantum etiam remanet, ſubtractis 20, ex 54. Modo tres proportionales longitudines intelliguntur: quarum tertia eſt 34; compoſita verò ex ſecunda, & prima erit 20; latus autem alterum, de quo propoſita anceps æquatio explicabilis eſt, componetur ex ſecunda, & tertia. Itaq; ſit latus alterum quęſitum 1R; ergo 1 Q — 34R ⊏ 680: & eruetur latus quæſitum maius; nequit autem numeris rationalibus explicari.

$$1\,Q - 34\,R \sqsubset 680$$

$$289$$

$$969$$

Latus malus ℞ 969 ✠ 17

Para-

Paradigma secundum analyseos cubi auulsi à solido sub quadrato, ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.	
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.	9 0 Tot numerales circuli, quot puncta cubica. R 3 0, Q 9. 0, C 27. 0
Cubus auulsus resoluendus.	2 4	3 0 0		
	.	Q R.	Puncta cubica.	
	C 1	C 1 1		
Solidum restituens.	2 7		Cubus lateris primi.	
Solidum restitutum.	5 1	3 0 0		
Solidum principale minuens.	5 1	3	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.	
Excessus restituti.	0			

Paradigma tertium analyseos cubi auulsi à solido sub quadrato, ad inueniendum radicem maiorem.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.	
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.	0 0 Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue singularia. R 4 6, Q 16, 25, C 64, 125
Solidum sub quadrato multatum lateris cubo.	2 4	3 0 0		
	.	Q R.	Puncta cubica.	
	C 1	C 1 1		
Solidum restituens.	6 4		Cubus lateris primi.	
Solidum restitutum.	8 8	3 0 0		
Solidum principale minuendum.	9 1	2	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.	
Reliquum resoluendi cubi.	2	9 0 0		

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à duplo lateris primi in coefficientem.	4	5 6	
	Coefficiens.		5 7	
Reliquum resoluendi cubi.		2	9 0 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	4	8	
	Triplum latus primum.		1 2	
Differentia diuisorum.			3 9 3	
Solida ablatitia		2 4	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		5	0 0	A quadrato secundi in triplum latus primum.
			1 2 5	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		2 7	1 2 5	
Solida addititia		2 2	8 0	A latere secundo in planum expletionis.
		1	4 2 5	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum addititiorum.		2 4	2 2 5	
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo cubo.		2	9 0 0	

Habi-

Habito latere minori, maius etiam haberi potuisset hoc modo. Latus minus erat 30, eius quadratum est 900, ad quod applicetur solidum 24300; fit quotiens 27, numerus, qui etiam habetur subtracto numero 30, ex numero 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum tertia sit 27, composita verò è secunda, & prima 30: latus igitur alterum, de quo æqualitas explicari potest, componitur ex secunda, & tertia. Latus igitur maius, vt indagetur supponendum est, si fuerint tres quantitates proportionales, quadratũ aggregati ex secunda, & tertia, minus rectangulo comprehenso sub eodem aggregato, & tertia, æquale esse rectãgulo comprehenso sub aggregato primæ, & secundæ, & sub tertio. Vt sint 6, 18, 54: aggregatum ex 18, & 54, est 72; cuius quadratum est 5184; à quo

Ex latere minori eruitur latus maius.

Ad indagandam radicem maiorem.

$$1Q - 27R = 810$$

$$\begin{array}{r} 13\tfrac{1}{2} \\ 13\tfrac{1}{2} \\ \hline 182\tfrac{1}{4} \\ 729 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 810 \\ 4 \\ \hline 3240 \\ 729 \\ \hline 3969 \\ 63 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31\tfrac{1}{2} \\ 13\tfrac{1}{2} \\ \hline 45 \end{array}$$

si dematur 3888, rectangulum comprehensum sub 72, & 54, remanet 1296; quantum fit ex 54, in 24, aggregatum ex prima, & secunda. Summa igitur, ex secunda, & tertia esto 1 R, cuius quadratum est 1 Q; subtrahamus autem 27 R, productum à 27, tertio termino in 1 R, aggregatum ex secundo, & tertio; fiet residuum 1 Q — 27 R; & æqua-

 bitur

bitur 810, producto ex 30, composito à primo, & secundo in 27, tertium terminum. Si verò huius æquationis radix eruatur, comperietur esse 45, vt ex hoc retroscripto paradigmate colligitur. Eam autem esse trium quantitatum proportionalium naturam facillimè quidem ostenditur.

Aliter etiã eadem maior radix inuenitur.

Possumus eandem radicem maiorem hunc in modum consequi. Dicebamus radicem esse summam ex secunda, & tertia magnitudine ex tribus proportionalibus. Reperiamus tres ipsas proportionales; minor enim inuenta 30, est summa ex prima, & secunda. Dico primum terminum esse 1 R, secundus erit 30 — 1 R, tertius est 27; productum ex primo in tertium, scilicet 27 R, æquatur quadrato medij, nempe 900 — 60 R + 1 Q; per antithesin autem fit

$$87\,R - 1\,Q = 900$$

$$\begin{array}{r} 43\tfrac{1}{2} \\ 43\tfrac{1}{2} \\ \hline 1892\tfrac{1}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7569 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 900 \\ 4 \\ \hline 3600 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \hline 3969 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43\tfrac{1}{2} \\ 31\tfrac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

1 R valor 12

æquatio, vt vides; & ita reperiemus 1 R, valorem esse 12. Si verò 12, subtrahatur ex 30, remanebit 18, pro secundo: erunt ergo 12, 18, 27, termini quæsiti: ac proinde summa ex secundo, & tertio nota erit 45.

Potuisset etiam inueniri secundus: ille siquidem esto 1 R; primus erit 30 — 1 R; tertius est 27: productum autem primi in tertium, puta 30 — 1 R, in 27, fit 810 — 27 R

27 R = 1 Q; est enim rectangulum sub primo, & tertio, æquale quadrato secundi, seu medij: est igitur æquatio 1 Q + 27 R = 810, & huius radix 18; est itaq; medius terminus numerus 18.

Si verò priùs habeatur latus maius, puta 45, habebitur minus hac arte. Quadratum enim ex 45, puta 2025, si constituatur diuisor, ad quem nimirum applicetur 24300, orietur 12 latus, quod etiã habetur subductis 45, ex 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum prima sit 12, composita ex secunda, & tertia 45; latus autem alterum, de quo proposita æqualitas est explicabilis, componitur ex prima, & secunda:

1 Q + 27 R = 810
13½
13½
———
182¼
729 3240
——— ———
4 4

3240
729
———
3969
63 31½
——— 13½
2 ———
18

erit igitur æquatio 1 Q — 12 R = 540, & fit 1 R, numerus 30, & est latus minus superiùs positæ æquationis.

Sit proposita æquatio 120 Q — 1 C = 55296: facta designatione punctorum, & ordinatis ijs, quæ in generalibus præceptis tradita sunt. Primum latus esto 2, latus nimirum cubicum numeri 55; cubus ipsius est 8, quo addito ad 55, fit 63; huic autem annexis reliquis figuris fit 63296; modo sumatur 4, duplum primi lateris, ducatur in 120, coefficientem, & fit 480; subtrahatur à 632, vt remaneat 152, cui annexis figuris 96, fit 15296; ducatur autem 4, duplum primæ figuræ in 120, coefficientem, & fit 480, planum expletionis; mox verò 120, coefficiens ei *Explicatur æquatio proposita.*

sub-

subscribatur, vt vnius figuræ loco illud antecedat, subscribatur numerus 15296, vt vides. Igitur ad indagandam secundam figuram, sumo 12, triplum quadratum primæ; sumo 6, triplum eiusdem primæ figuræ: noto hos numeros, vt in Paradigmate vides; subtraho diuisores istos inferiores 126, à superioribus, nimirum plano expletionis, & coefficiente simul sumptis, seruata antecessionis iam dictæ cautela: subtraho igitur 126, à 4920; remanet 3660, pro diuisore; ad quem facta applicatione numeri 15296, fit quotiens 4, seruata cautela, vt si sumatur pro quotiente numero, solida facta per congruas multiplicationes subtrahi possint. Scribo itaq; 48, solidum factum à latere secundo in triplum quadratum primi; item scribo 96, solidum factum à quadrato secundi in triplum latus primum; demum scribo 64, cubum lateris secundi: horum solidorum summa est 5824. Modo duco 4, latus secundum in 480, planum expletionis; fit 1920: deinde duco 16, quadratum secundi lateris in coefficientem; fit quoq; 1920. Scribo hos numeros, vt vides, iuxta leges analyseos à synthesi desum tæ; & fit summa 21120: ab hoc autem numero subtraho 5824; & remanet 15296, numerus æqualis reliquo numero resoluendo, &c. Non dissimili modo si proponeretur æquatio 240 Q — 1 C = 947264; poterit explicari. Item si sit æquatio 140 Q — 1 C = 397375; præterea 100 Q — 1 C = 108375, non dissimili artificio poterunt explicari.

Coef-

Coefficiens.	1 2 0		0	0
		. .	R 2	4
			Q 4	16
Solidum subquadrato multatum lateris cubo.	5 5	2 9 6	C 8	64
	.	.		
	8			
	6 3	2 9 6		
	4 8	0		
Reliquum resolvendi cubi.	1 5	2 9 6		
		4 8 0		
		1 2 0		
Reliquum resolvendi cubi.	1 5	2 9 6		
		.		
	1	2		
		6		
	3	6 0		
	4	8		
		9 6		
		64		
	5	8 . 4		
	1 9	2 0		
	1	9 2 0		
	2 1	1 2 0		
	1 5	2 9 6		

Coefficiens.	2 4 0		0	0
		. .		
Solidum subquadrato multatum lateris cubo.	947	2 6 4	7	6
			Q 49	36
	.	.	C 343	216
	3 4 3			
	1190			
	2176	0		
Reliquum resolvendi cubi	214	2 6 4		
	3 3	6 0		
		2 4 0		
Reliquum resolvendi.	114	2 6 4		
		.		
	1 4	7		
		2 8		
	1 8	9 2 0		
	2 8	2		
	7	5 6		
		3 3 6		
	9 5	9 7 6		
	1 0 1	6 0		
	8	6 4 0		
	1 1 0	2 4 0		
	2 1 4	2 6 4		

Coef-

Coefficiens. 140 | 0 0

R 8 5
Q 64 25
C 512 125

Solidum subquadrato multatum lateris cubo. 397 | 375

512

909 | 175

896 | 0

Reliquum resoluendi cubi. 13 | 375

2240

140

Reliquum resoluendi cubi. 13 | 375

59 | 2

24

2 | 100

96 | 0

6 | 00

125

102 | 125

612 | 00

3 | 50,0

115 | 500

13 | 375

Coefficiens. 100 | 0

0 0
8 5
Q 64 25
C 512 125

Solidum subquadrato multatum lateris cubo. 108 | 175

512

620 | 175

640 | 0

Reliquum resoluendi cubi 19 | 625

16 | 00

100

Reliquum resoluendi &c. 19 | 625

19 | 2

2,4

3 | 40

96 | 0

6 | 0 0

125

102 | 125

80 | 0 0

2 | 500

12 | 500

19 | 625

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter QQ ✠ R, & N.

E Dato in numeris quadrato-quadrato affecto adiunctione plano-plani sub latere, & dato coefficiente solido, latus analyticè elicere.

Si proponeretur 1 QQ ✠ 40 R ═ 332736, & quæratur radix huius æquationis, cuius est sensus; *vt reperiatur numerus, qui ductus in sui cubum, & in* 40, *faciat* 332736; numerus hic 332736, est quadrato-quadratum affectum, non autem purum, est autem affectum adiunctione plano-plani sub latere quadrato-quadrati, & dato solido 40.

Huius autem quadrato-quadrati affecti genesis hoc solùm addit genesi quadrato-quadrati puri, vt latus singulare quod primùm elicitur ducatur in solidum coefficiens; deinde latus secundum in idem ducatur. At verò ex affecto huiusmodi quadrato quadrato eliciuntur latera. Sedes igitur vnitatum quadrato-quadrata metientium, per quaternas figuras distinguuntur, punctis à dextra ad læuam subtus adnotatis; quemadmodum diximus tractantes de analysi puri quadrato quadrati. Quot autem sedes quadrato-quadratorum, vel puncta numerantur; tot sedes laterum simplicium constitui debent; cum coefficiens solidum sit sublaterale: constitui autem debent per singulas figuras desuper, punctorum beneficio, vt in paradigmate videre licet; in vltima verò eorum sede, quæ prima sit à læua ad dextram, coefficiens ipsum solidum consistat. Quamobrem dum coefficiens pluribus, quàm vna figura constet, in anteriora reliqua prorumpent ad læuam.

Explicatur methodus extrahendi radicem æquationis, in qua QQ † R, æquatur N.

Sedes simplicium laterum quomodo constituantur.

Præterea latera quidem eliciuntur, vt fit in analysi quadrato-quadrati puri. Hic solùm addendum, vt coefficiens solidum, in diuisorum numerum adscribatur. Eli-

Quid interfit inter hanc æquationem, & æquationē quadrato-quadrati puri.

cita singularia latera in ipsum ducuntur; & plano-planum, quod inde fit, debet desinere sub sede coefficientis solidi, & auferendum est, ex affecto proposito quadrato-quadrato. Deniq; coefficiens in succedentia loca ordine subjicitur, & ipsi diuisores quoq; reliqui subtus mouebuntur: hęc enim huius æquationis analysis exposcit.

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati affecti sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.		4 0	Sublaterale.			
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	. .		Tot pūcta simplicium laterum, quot sedes punctaue quadrato-quadratorum.	0		• Tot numerales circuli, quot pūcta quadrato-quadratica.
	3 3	2736		R 2	4	
				Q 4	16	
	.	CQR.	Puncta quadrato-quadratica.	C 8	64	
	QQ1	QQ15		QQ16	256	
Plano-plana ablatitia.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.			
		8 0	A latere primo in coefficiens solidum.			
Summa plano-planorum ablatitiorum.	1 6	0 8				
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	1 7	29 36				

II. Educ-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.		4 0	
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.		1 7	1936	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sextuplum quadratum eiusdē.		2 4	
	Quadruplum latus primum.		8	
Summa diuisorum.		3	1520	
Plano plana ablatitia.		1 2	8	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
		3	8 4	A lateris secundi quadrato in sexcuplum quadratum primi.
			5 1 2	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
			2 5 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
			1 6 0	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano planorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi affecti quadrato quadrati.		1 7	1936	

Si itaq; proposita foret æquatio 1QQ + 40R = 332736, & sit 1R valor 24.

S C H O L I O N.

Breuiùs hoc modo. Primò ex 33, subtrahatur 16, quadrato-quadratum primi lateris singularis; mox à residuo 17 736, subtrahatur 80, solidum à latere primo in coefficiens solidum, & remanet 171936. Ad indagandum latus secundum para diuisorem hoc modo. Sume 32, duplum cubum lateris primi, deinde 24, triplum quadratū eiusdem, mox autem 8, cubum eiusdem, deniq; 40, coefficiens solidum: omnes hi numeri dispositi, vt in paradigmate vides, colligantur in vnā summam, fitq; 54520, diuisor; per quē diuisis 171936, fit quotiens 4. Modo subtrahatur 128, nempe numerus factus à latere secundo in quadruplum cubum lateris primi; remanet 43; cui annexis 936, sequentibus figuris, fit 43936; subducatur 384, numerus factus à lateris secundi quadrato in sexcuplum quadratum primi, & remanet 5536; ab hoc subtrahatur 512, numerus à cubo lateris secundi, in quadruplum latus primum; à residuo 416, subtrahatur 256, quadrato-quadratum lateris secundi; deniq; à residuo 160, subtrahatur 160, numerus productus à latere secundo in coefficiens solidum, & nihil remanet.

```
                                  2       4
1QQ + 40R = 3 3 2 7 3 6
                 .       .
                1 6
               ------------
3 2            1 7 2 7 3 6
  2 4                  8 0
    8          ------------
    4 0
5 4 5 2 0 Diuisor.   1 7 1 9 3 6
               1 2 8
               ------------
                 4 3 9 3 6
                 3 8 4
                 ----------
                     5 5 3 6
                     5 1 2
                     -------
                       4 1 6
                       2 5 6
                       -----
                       1 6 0
                       1 6 0
                       -----
                         0 0
```

Paradigma aliud, analyseos quadrato-quadrati affecti sub latere affirmatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	1	000
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	35	5776
	QQ	QQ
Plana ablatitia	16 2	 000
Summa plano-planorum ablatitiorum.	18	000
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati affecti.	17	5776

Sublaterale.

Tot puncta simplicium lateris.		
R	2	4
Q	4	16
C	8	64
QQ	16	256

CQR. Puncta quadratica.

Quadrato-quadratum lateris primi.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior { Coefficiens solidum.		1000
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.	17	5776
Diuisorum pars inferior. { Quadruplus cubus lateris primi.	3	2
Sexcuplũ quadratum eiusdem.		24
Quadruplum latus primum		8
Summa diuisorum.	3	5480
Plano plana ablatitia. { A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.	12	8
A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi	3	84
A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum		512
Quadrato-quadratum lateris secundi.		256
A latere secundo in coefficiens solidum.		4000
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi affecti quadrato quadrati.	17	5776

Si igitur proponeretur equatio 1QQ + 1000R = 315776, fieret vnius radicis pretium 24.

Para-

Paradigma tertium analyseos quadrato-quadrati affecti sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.		8 0
		. .
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	1 5 0	3 4 2 5
	.	CQR.
	QQ1	QQ1r
Plano plana ablatitia.	8 1	
		2 4 0
Summa plano-planorum ablatitiorum.	8 1	2 4 0
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati affecti.	6 9	1 0 2 5

Subluterale	0	0
Tot puncta simplicium laterum, quot sedes punctaue quadrato-quadratorum.	R 3	5
	Q 9	25
	C 27	125
	QQ 81	625

Puncta quadrato-quadratica.

Plano plana ablatitia: 8 1 — Quadrato-quadratum lateris primi. 2 4 0 — A latere secundo in coefficiens solidū.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.		8 0
			.
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.		6 9	1025
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	1 0	8
	Sextuplum quadratum eiusdē		5 4
	Quadruplum latus primum.		1 2
Summa diuisorum.		1 1	3600
Plana ablatitia.	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.	5 4	0
	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.	1 3	5 0
	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.	1	500
	Quadrato quadratum lateris secundi.		625
	A latere secundo in coefficiens solidum.		400
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluēdi affecti quadrato-quadrati.		6 9	1025

Dum itaq; fuerit æquatio 1QQ + 80R = 1503425 fit radix 35. &c.

SCHO-

SCHOLION.

SI placet ad breuiorem formam superiorem analysin redigere, facta punctorum designatione, &c. latus primum esto 3, cuius quadrato-quadratum, puta 81, si subtrahatur ex 150, remanebit 69, huic annectatur sequentes figuræ 3425, à quo subtrahatur 240, numerus factus à latere primo in coefficiens solidum facta subtractione, vt vides, remanet 691025. Ad indagandam secundam figuram paro diuisorem hoc modo, sumo 108; quadruplum cubum lateris primi, praterea 54, sextuplum quadratum eiusdem, praterea 12, quadruplum latus primum, insuper 80, coefficientem; colligo hos numeros ordinatos ad eandem formam, vt vides; & per 113600, numerum collectum, diuido 691025, fit quotiens 5: sublatis autem plano-planis auferendis ab ipso 691025, nihil remanebit; erit igitur 1 R valor 35.

```
                                3     5
1QQ + 80R = 1 5 0 3 4 2 5
                  .     .
                8 1
              -----------
                6 9 3 4 2 5
1 0 8               2 4 0
              -----------
    5 4         6 9 1 0 2 5
      1 2       5 4 0
        8 0   -----------        Indagatur secunda figura.
-----------     1 5 1 0 2 5
Diuisor 113600  1 3 5 0
              -----------
                  1 6 0 2 5
                  1 5 0 0
                -----------
                    1 0 2 5
                      6 2 5
                  ---------
                      4 0 0
                      4 0 0
                  ---------
                      0   0
```

Ple-

Quando subgradualis magnitudo protrahitur vltra quadrato quadratum affectum.

Plerumq; contingit subgradualem coefficientem magnitudinem in anteriora produci vltra quadrato-quadratum affectum, vel eo saltem loci, vt ab ipso coefficiens auferri nequeat. Hoc autem arguit quadrato-quadratum, non tàm affici, quàm afficere, quoniam minus est afficiente plano-plano. Est propterea coefficiens ad succedentes sedes ordine reuocanda, donec diuisioni sit locus, seu diuisio possit institui. Præstat in huiusmodi casu initium ducere à diuisione: animaduertendum verò quot punctis coefficiens retrocedet; tot etiam loca, siue puncta quadrato quadratorum subtus adnotata, delenda esse, ea nimirum à quibus alioquin operis initium desumendum fuisset.

Quod si vltra potestatem affectam coefficiens non producatur, coefficiens inquam subgradualis longitudo; quod tamen oritur ex applicatione ad coefficientem ipsam, minus est potestate lateris, quod primùm eruitur: homogeneum affectionis est potestate maius, præcipuusq; diuisor est ipsa subgradualis coefficiens. Quamobrem si fuerit æquatio, in qua coefficiens magnitudo subgradualis in anteriora prorumpat; procedendum vti diximus: si verò non producatur vltra potestatem affectam, quod verò oritur ex applicatione minus fuerit potestate lateris illius, quod primum elicitur; tunc homogeneum affectionis erit potestate maius, & ipsa subgradualis coefficiens magnitudo, tanquam præcipuus diuisor assumitur. Hæc autem conspicere licet ex infra scriptis exemplis, vt quisq; poterit aduertere: quod enim oritur ex diuisione numeri 3345264, minus est potestate lateris, quod primum eruitur ex numero 334; hoc enim est 4, cuius QQ est 256, at quotiens ex diuisione est 26.

Para-

Paradigma cum plano-planum maius est quadrato-quadrato.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens solidum.	125	562	Sublaterale.	0 0
Quadrato-quadratum afficiens resoluendum.	334	5264		R 2 4
		CQR.		Q 4 16
	QQ1	QQ11		C 8. 64
				QQ 16. 256
Plano-plana ablatitia.	251	124	A latere primo in coefficiens solidum.	
	16		Quadrato-quadratum lateris primi.	
Summa plano-planorum ablatitiorum.	267	124		
Reliquum resoluendi afficientis quadrato-quadrati.	67	4024		

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.	12	5562	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.		67	4024	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sextuplum quadratum eiusdẽ		24	
	Quadruplum latus primum.		8	
Summa diuisorum.		16	0042	
Plano-plana ablatitia.		50	2248	A latere secundo in coefficiens solidum.
		12	8	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
		3	84	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi.
			512	A cubo lateris secundi in cubum primi.
			256	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda, æqualis reliquo resoluẽdi afficientis quadrato-quadrati.		6 7	4024	

Tt Para-

Paradigma secundum cum plano-planum maius est quadrato-quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	1 2 5	6 4 2	Sublaterale.
		. .	
Quadrato-quadratum afficiens resoluendum.	5 0 6	9 1 2 0	
	.	CQ R.	
	QQ I	QQ II	
Plano-plana ablatitia.	3 7 6	9 2 6	A latere primo in coefficiens solidum.
	8 1		Quadrato-quadratum lateris primi.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	4 5 7	9 2 6	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati afficientis.	4 8	9 8 6 0	

Tot puncta simplicium laterũ, quot quadrato-quadratorum. Puncta quadrato-quadratica.	0	0
R.	3	2
Q.	9	4
C	27	8
QQ	81	16

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.	1 2	5642	
		.	.	
Quadrato-quadrati resoluendi reliquum.		4 8	9860	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	1 0	8	
	Sextuplum quadratum eiusdem.		5 4	
	Quadruplum latus primum.		1 2	
Summa diuisorum.		2 3	9162	
Plano-plana ablatitia		2 5	1284	A latere secundo in coefficiens solidum.
		2 1	6	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
		2	1 6	A quadrato secundi in sextuplum quadratum lateris primi.
			9 6	A cubo lateris secundi in quadruplum primi.
			1 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi afficientis quadrato-quadrati.		4 8	9860	

Para-

Paradigma tertium, cum plano-planum maius est quadrato quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	1 2 1	2 6 0	Sublaterale.
			Tot puncta simplicium laterum, &c.
Quadrato-quadratum resoluendum	1005	54 16	
		CQR.	Puncta quadrato-quadratica. R. 4, 6; Q. 16, 36; C. 64, 216; QQ 256, 1296
	QQ 1	QQ 12	
Plano-plana ablatitia.	4 8 5	0 4 0	A latere primo in coefficiens solidum.
	2 5 6		Quadrato-quadratum lateris primi.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	7 4 1	0 0 4	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati afficientis.	2 6 4	5 016	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens solidum.	1 2	1262	
Quadrato-quadrati resoluendi reliquum.	2 6 4	5016	
Diuisorum pars inferior. Quadruplus cubus lateris primi.	5	6	
Sextuplum quadratũ eiusdem.		9 6	
Quadruplum latus primum.		1 6	
Summa diuisorum.	3 8	7020	
Plano-plana ablatitia	7 2	7560	A latere secundo in coefficiens solidum.
	153	6	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
	2 4	5 6	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi
	3	4 5 6	A cubo lateris secundi in quadruplum primi.
		1296	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi afficientes quadrato-quadrati.	2 6 4	5016	

Paradig. analyseos quadrato-quadrati affecti adiunctione plano-plani sub coefficiente longitudine, & lateris cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	4
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	5 2	5 3 1 2
	QQ 1	C Q R. Q 1
Plano-plana in primis auferenda. {	1 6 1 1	2
Summa plano-planorum ablatitiorum.	2 7	2
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 9	3 3 1 2

Subcubica. 1 o o

Tot sedes, punctaue cuborum, quot quadrato-quadratica.

Puncta quadrato-quadratica.

R	2	4
Q	4	16
C	8	64
QQ	16	256

Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum à lateris primi cubo in coefficientem longitudinem.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Solidum expletionis à coefficiente longitudine in triplum quadratum lateris primi.	1	6 8
	Planum expletionis à coefficiente longitudine in triplum latus primum.		8 4
	Coefficiens longitudo.		3 4
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		2 5	3 3 1 2
Diuisorum pars superior, & precipua.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2
	Sextuplum quadratum lateris primi.		2 4 6 2
	Quadruplum latus primum.		8
Summa diuisorum.		5	2 4 5 4
Plano-plana auferenda à diuisoribus.	Inferioribus.	1 2	8
		3	8 4
			3 1 2
			2 5 6
	Superioribus.	6	7 2
		1	3 3 4
			8 9 6
Summa plano-planorum auferenda, æqualis residuo resoluendo quadrato-quadrato.		2 5	3 3 1 2
		2 7	

A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
A quadrato in sextuplum quadratum primi.
A cubo secundi in quadruplum latus primum.
Quadrato-quadratum lateris secundi.
A latere secũdo in solidum expletionis.
A quadrato secundi in planum expletionis.
A cubo secundi in coefficientem longitudinem.

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter QQ — R, & N.

E Dato in numeris quadrato-quadrato affecto multa plano-plani sub latere, & dato coefficiente solido, latus analyticè elicere.

Si quis benè perceperit hactenus præcepta tradita de æquatione quadrato quadrati affecti adiunctione plano-plani sub latere, datoq; solido coefficiente, seruatis præceptis, vt scilicet loco subtractionis adhibeatur additio; haud difficile hanc etiam æquationem explicabit. Quapropter, si proponeretur æquatio huiusmodi 1QQ — 2000 = 404976, instituetur analysis, vt in sequenti paradigmate licet intueri.

Paradigma analyseos quadrato-quadrati, affecti negatè sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	2	000	Sublaterale.
		. .	Tot puncta simplicia, &c.
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	40	4976	
	.	CQR.	Puncta quadrato-quadrata.
	Q 2	QQ 16	
Planoplana prostaphæretica.	16		Quadrato-quadratum lateris primi.
Recessus planoplanorum, &c.	12	000	A latere primo in coefficientem.
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	28	4976	

	o	o
R	2	6
Q	4,	36
C	8,	216
QQ	16,	1296

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens.		6000	
Reliquum resoluendi.	2 8	4976	
Diuisorum pars inferior.	5	2	
		2 4	
		8	
Excessus, siue differentia.	3	2480	
Plano-plana ablatitia.	1 9	2	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
	8	6 4	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
	1	7 2 8	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
		1296	Quadrato quadratum lateris primi.
Summa plano-planorum.	2 9	6976	
Plano-planum auferendum.	1	2000	A latere secundo in coefficiens solidum.
Excessus aequalis reliquo resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 8	4976	

Methodus explicandi aequationem inter R — QQ, & N.

E Data in numeris plano plano sub latere, & data coefficiente solida magnitudine, affecto multa quadrato-quadrati, latus analyticè elicere.

Hæc æquatio de duobus lateribus explicabilis est, siquidem potestas negatur de homogenea sub gradu; ac pro-

proinde latus est anceps. Vt si proponeretur 27755 R — 1 QQ = 217944; duplex est huius æquationis radix; est enim 217944, plano-planum sub latere, & dato coefficiente solido, nempe 27755: cum itaq; potestas negetur de homogenea sub gradu, latus est anceps; de duobus igitur lateribus hæc est æquatio explicabilis. Cubus autem minoris è duobus lateribus minor est quarta parte numeri 27755: cubus verò maioris, est maior. Quo fit, vt ex applicatione quadrupli plano-plani 217944, ad solidum iam dictum 27755, prosiliat in quotiente numerus maior radice minore, & minor radice maiori.

Paradigma primum analyseos quadrato-quadrati auulsi à plano plano sub latere, ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens solidum.	2 7	7 5 5	Sublaterale.
		. .	
Plano-planum sub latere multatum lateris quadrato-quadrato.	2 1	7 9 4 4	
	.	C Q R.	
	QQ 1	QQ 11	

Cum autem radix quæsita minor sit latere cubi solidi 6938, ob id prima figura nequit esse 2.

II. Edu-

II. *Eductio lateris primi post deuolutionem.*

Coefficiens solidum.	2	7755	Sublaterale.
Plano-planum sub latere multatum lateris quadrato-quadrato.	21	7944	
Plano-planum restituens.		4096	Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum restitutum.	22	2040	
Plano-planum principale minuens æquale plano-plano restituto.	22	2040	A latere primo in coefficiens solidum.

Paradigma secundum analyseos quadrato-quadrati auulsi à plano-plano sub latere, ad inueniendam radicem maiorem.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens solidum.	27	755	
Plano-planum multatum resoluendum.	21	7944	
	.	QQR 1	
	QQ1	QQ1R	
Plano-planum restituens.	16		Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum restitutum.	37	7944	
Plano-planum principale minuendum.	55	510	A latere primo in coefficiens solidum.
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	17	7156	

II. *Edu-*

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.	2	7	7	5	5		
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.		1	7	7	1	5	6	
Diuisorum pars inferior.	Quadrato cubus lateris primi.		3	2				
	Sextuplũ quadratũ lateris primi.			2	4			
	Quadruplum latus primum.					8		
Summa diuisorum inferiorum.			3	4	4	8		
Plano-plana ablatitia.		2	2	4				A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
			1	9	6			A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
			2	7	4	4		A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
				2	4	0	1	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum ablatitiorũ.		3	7	1	4	4	1	
Plano-planum addititium.		1	9	4	2	8	5	A latere secundo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo auulso quadrato-quadrato.		1	7	7	1	5	6	

Methodus explicandi æquationem inter QC + S, & N.

Dato in numeris quadrato-cubo affecto adiunctione plano-solidi sub latere, & dato coefficiente plano-plani latus analyticè elicere.

Quadrato cubi affecti genesis ordinata, se habet ad eum modum, quo genesis puri quadrato-cubi. hoc solum illi addit, vt nimirum latus singulare, quòd primùm elici tur, in plano planum coefficiens ducatur, deinde secundum latus per idem quoq; multiplicetur, *Quo pacto se habeat genes quadrato cubi ordinata.*

Collocatis igitur punctis subtus per alternas quinas figuras distinguentibus sedes quadrato-cuborum, quemadmodum in analysi quadrato-cubi puri dictum fuit, à dextra nimirum ad læuam, instruetur analysis. Quot autem *Methodus hanc æquationem explicandi declaratur.*

ſedes quadrato cuborum numerantur, ſiue puncta ſubtus notata, à quibus illæ ſedes deſignantur; tot laterum etiam ſimplicium conſtituentur, per ſingulas figuras supernè ſuis punctis congruè collocatis; in vltima ſede coefficiens conſiſtet: per ſingulas autem figuras ſedes conſtituuntur; quoniam coefficiens eſt ſublaterale; quamobrem, cum in vltima ſede conſiſtet, dum pluribus, quàm vna figura conſtet, in anteriora protrumpent figuræ reliquæ.

Coefficiens plano-planum eſſe e numero diuiſorum.

Analyſis autem procedit, vti dictum à nobis fuit ſuperiùs de quadrato-cubo puro; hoc ſolùm addito, vt coefficiens plano planum ſit è numero diuiſorum; ſingularia verò latera elicita in illud ducantur; plano ſolidum autem inde factum deſinens ſub ſede coefficientis, auferatur ex propoſito quadrato-cubo. Demum coefficiens ordine in ſuccedentia loca ſubijcitur, dum inferiùs quoq; reliqui diuiſores in ſuccedentia loca mouebuntur, quemadmodum analyſis ipſa requirit.

Paradigmà analyſeos quadrato-cubi affecti ſub latere.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens plano-planum.		4 2 6	Sublaterale.
		. .	Tot puncta ſimplicium laterum, quos quadrato-cubica.
Quadrato-cubus affectus reſoluendus.	7 9	7 2 8 4 8	
	.	QQ CQ R.	Puncta quadrato-cubica
	QC1	QC18	
Plano ſolida ablatitia.	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.
		0 8 5 2	A latere primo in coefficiens planum.
Summa plano ſolidorum ablatitiorum.	3 2	0 8 5 2	
	4	6 4 3 2 8	

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

		0	0
R.		2	4
Q		4.	16
C		8	64
QQ		16.	256
QC		32.	1024

Tot numerales circuli, quot puncta, &c.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens plano-planum.		426	
Quadrato-cubi affecti resoluendi reliquum.		47	64328	
Diuisorum pars inferior, & precipua.	Quintuplum quadrato-quadratum lateris primi.	8	0	
	Decuplus cubus eiusdem.		80	
	Decuplũ quadratum eiusdem.		4	
	Quintuplũ latus primum.		10	
Summa diuisorum omnium.		8	84526	
Plano solida ablatitia facta à diuisoribus.	Inferioribus.	32	0	A latere secundo in quintuplũ quadrato quadratum lateris primi.
		12	80	A quadrato lateris secundi in decuplum cubum primi.
		2	56	A cubo lateris secundi in decuplum quadratum primi.
	Superioribus.		2560	A quadrato-quadrato lateris secundi in quintuplum latus primum
			1024	Quadrato-cubus lateris secundi.
			1704	A latere secundo in coefficiens plano-planum.
Summa plano solidorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi quadrato cubi.		48	64328	

Quamobrem si fuerit æquatio 1 C + 426 R = 7972848 fit 1 R pretium 24, &c.

Si itaq; fuerit æquatio 1QC + 426R = $\overset{2}{7}9\overset{}{7}28\overset{4}{4}8$

160	7972848
80	32
40	477284
10	852
426	4764328
Diuisor 244526	320
	1564328
	1280
	284328
	2560
	28328
	2560
	2728
	1024
	1704
	1704
	0 0

Vides in adiuncto paradigmate superiorem eandem analysin redactam in simpliciorem formam. Primò siquidem 32, quadrato-cubus nimirum numeri 2, subtrahitur de 79, & remanet 47; adiunctis autem sequentibus figuris 7284, fit 477284; subducto 852, numero producto ex multiplicatione coefficientis in primum latus, remanet 476432; cui intelligenda est annexa postrema figura 8. Modo superest vt indagemus secundam figuram per diuisorem inuentum, vt cernis; & ita dum fuerit secunda figura adinuenta 4, absoluetur operatio, quemadmodum ex apposito paradigmate cuicunq; colligere licet.

Methodus explicandi æquationem inter QC — R, & N.

EX hactenus explicatis laboriosum non erit hanc etiam æquationem explicare. quamobrem, si detur æquatio 1 QC — 60 R ═ 248112, reperiemus radicem esse 12, & si fuerit 1 QC — 60 R ═ 3198800, reperiemus esse 20.

	0	0
R	1	2
Q	1	4
C	1	8
QQ	1	6
QC	3	2

60
. .
2 | 48112
. QQCQR.
QC 1 | QC 1
60
2 | 48712
1
2 | 48712
60
2 | 48712
5
10
10
10
6 1 1 6 0
2 | 0
40
80
80
32
2 | 48832
120
2 | 4871

	0	0
R	2	0
Q	4	0
C	8	0
QQ	16	0
QC	32	0

60
. .
3 1 | 98800
. QQCQR.
QC 1 | QC 1
120
2 2 | 00000
2 2

Methodus explicandi æquationem inter R−QC, & N.

SI proponeretur æquatio 4000000R − 1QC = 4775 1168.

Reperietur huius æquationis radix 12.

Si proponetur æquatio 4000000R − 1QC = 76200000.

Reperietur Radix 20; analysis autem ex dictis facilè deduci potest.

Methodus explicandi æquationes multipliciter affectas.

Qua arte æquationes multipliciter affectæ possunt explicari.

GRadum facimus ad explicandas æquationes multipliciter affectas; nimirum qua arte explicetur æquatio quadrato quadrati affecti, tàm sub latere, quàm quadrato; & quidem per affirmationem vtriusq;. Insuper qua methodo explicari possit æquatio in qua quadrato quadratum afficitur sub latere per affirmationem, & cubo per negationem; Item quomodo possit æquatio illa euolui, in qua quadrato-quadratum afficitur sub cubo per affirmationem, & latere per negationem. Præterea qua via sit incedendum ad explicandam æquationem, in qua quadrato-quadratum afficitur sub cubo, quadrato, & latere per affirmationem, quæ facile ex adiunctis exemplis intelligi poterunt; hic multa dicenda forent, quæ breuitati consulentes omittimus.

Para-

Paradigma analyseos Quadrato-cubi affecti sub cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.		4	Subcubicum. Tot puncta cubica quot quadrato-cubica.
Quadrato-cubus affectus resoluendus.	8 0	1 7 9 2 0	
	.	QQC Q R.	Puncta quadrato-cubica.
	QCi	QCii	
Plano-solida ablatitia	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.
		3 2	A cubo lateris primi in coefficiens planum.
Summa plano-solidorum ablatitiorum.	3 2	3 2	
Reliquum resoluendi quadrato-cubi.	4 7	8 5 9 2 0	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisor pars superior.	Plano-planū expletionis a coefficiēte plano in triplum quadratum lateris primi.		4 8
	Solidum expletionis à coefficiēte plano-plano in triplum latus primum.		2 4
	Coefficiens planum.		4
Reliquum resoluendi quadrato-cubi.		4 7	8 5 9 2 0
Diuisorum pars inferior.	Quintuplū quadratum lateris primi.	8	0
	Decuplus cubus eiusdē		8 0
	Decuplum quadratum eiusdem.		4 0
	Quintuplum latus primum.		1 0
Summa diuisorum.		8	8 9 3 4 4

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8	64
QQ	16	256
QC	32	1024

Plano solida ablatitia facta à diuisoribus.	Inferioribus.	3 2	0	A latere secun. in quadruplū quadrato quadratum lateris primi.
		1 2	8 0	A lateris secundi quadrato in decuplum cubum primi.
		2	5 6 0	A cubo lateris secundi in decuplū quadratum primi.
			2 5 6 0	A quadrato quadrato lateris secū-di in quintuplum primi.
			1 0 2 4	Quadrato cubus lateris secundi.
	Superioribus.		1 9 2	A latere secundo in planum expletionis.
			3 8 4	A quadrato secundi in solidum expletionis.
			2 5 6	A cubo secundi in coefficiens planum.
		4 7	8 5 9 2 0	

Me

Paradigma analyseos quadrato-quadrati affecti tam sub latere, quam quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	2	40	Subquadraticum. Tot puncta quadratica quot quadratoquadratic, 2.
Coefficiens solidum.		224	Sublaterale.
Quadratoquadratum affectũ resoluendum.	199	8720	Puncta quadrato-quadratica.
	QQ1	Q C R. QQ11	
Plano-solida ablatitia.	81		Quadrato-quadratum lateris primi.
	21	60	A quadrato lateris primi in coefficiens planum.
		672	A latere primo in coefficiens solidum.
Summa planorum ablatitiorum.	103	272	

Reliquum QQ. affecti resoluendi. 96 6000

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorũ pars superior.	Solidum expletionis a coefficiẽte plano in duplum lateris primi.	1	440
	Coefficiens planum.		240
	Coefficiens solidum.		224
Reliquum quadrato-quadrati affecti resoluendi.		96	6000
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	10	8
	Sextuplum quadratum eiusdem.		54
	Quadruplum latus primum.		12
Summa omnium diuisorum.		12	2384

Plano-plana facta à diuisoribus	Inferioribus.	64	8	A latere secun. in quadruplũ cubum primi.
		19	44	A lateris secundi quadrato in quadratum sextuplum primi.
		2	592	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1296	Quadrato-quadratum lateris secundi.
	Superioribus	8	640	A latere secundo in solidum expletionis.
			8640	A quadrato lateris secundi in coefficiens planum.
			1344	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum auferẽda æqualis reliquo resoluendi quadrato-quadrati affecti.		96	6000	

Dũ igitur est æquatio 1 QQ + 240 Q + 224 R æquatur 1998720 fit 1 R valor 36 vt vides.

Paradig-

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, sub Latere per affirmationem, & Cubo per negationem,

I. *Eductio lateris singularis primi.*

− Coefficiens longitudo.	6	0	Subcubica.
		.	
+ Coefficiens solidum.	246	584	Sublaterale.
		. .	
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	998	0160	
	.	C Q R.	Puncta quadrato-quadratica.
	QQ 1	QQ 12	
Plano plana ablatitia.	{ 256		QQ lateris primi.
	{ 986	336	A latere primo in coefficiens solidum,
Summa ablatitiorum.	1242	336	
Plano-planum addititium	384	0	A lateris primi cubo in coefficientem longitudinem,
Excessus ablatitiorum.	858	336	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	139	680	

	0	0
R	4	6
Q	16;	36
C	64:	216
QQ	256:	1296

Tot numerales circuli quot puncta quadrato-quadratica.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Divisorum pars superior.	Solidum expletionis à coefficiente longitudine in triplum quadratum lateris primi.	28	80	
	Planum expletionis à coefficiente in triplum latus primum.		720	
	Coefficiens longitudo.		60	
	✠ Coefficiens solidum.	24	6584	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		139	6800	
Divisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	25	6	
	Sextuplum quadratum eiusdem.		96	
	Quadruplum latus primum.		16	
Summa divisorum affectionis affirmatæ.		51	2344	
Summa divisorum affectionis negatæ.		29	5260	
Excessus divisorum affectionis affirmatæ.		21	7084	
Plano-plana ablatitia à divisoribus.	Inferioribus	153	6	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
		34	56	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratũ primi.
		3	456	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1296	Quadrato quadratum lateris secundi.
	Superiore.	147	9504	A latere secundo in coefficiẽs solidum.
Summa plano-planorum ablatitiorum.		339	6960	
Plano-plana additita.		172	80	A latere secundo in solidum expletionis.
		25	920	A quadrato lateris secundi in planum expletionis.
		1	2960	A cubo lateris secũdi in coefficientem.
Summa plano-planorum addititiorum.		200	0160	
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendi affecti quadrato-quadrati.		139	6800	

Dum itaq; est æquatio 1 QQ — 60 C ✠ 246584 R = 9980160 fit 1 R valor 46.

Para-

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, sub Cubo per affirmationem, & Latere per negationem.

I. Eductio lateris singularis primi

✠ Coefficiens longitudo.	2	0	Subcubica.
		. .	
— Coefficiens solidum.		2 2 4	Sublaterale.
		. .	
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	6 4 1	3 8 7 2	
	.	C Q R .	
	QQ I	QQ II	
Plano-plana ablatitia.	2 5 6		Quadrato-quadratum lateris primi.
	1 2 8	0	A lateris primi cubo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	3 8 4	0	
Plano-planum adeditium.		8 9 6	A latere primo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum.	3 8 3	1 0 4	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 5 8	2 8 2	

	0	0
R.	4	6
Q.	16:	36
C.	64:	216
QQ.	256:	1296

Tot numerales circuli quot puncta quadrato-quadratica.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	+ Solidum expletionis à coefficiente longitudine in triplum quadrati lateris primi.	9	60	
	+ Planum expletionis à coefficiente longitudine in triplum latus primum.		240	
	+ Coefficiens longitudo.		20	
	— Coefficiens solidum.		224	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		258	2832	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	25	6	
	Sextuplum quadratum eiusdem.		96	
	Quadruplum latus primum.		16	
Summa diuisorum affectionis affirmatæ.		36	4180	
Diuisor affectionis negatæ.			224	
Excessus diuisorum affectionis affirmatæ.		36	3956	
Plano-plana ablatitia à diuisoribus.	Inferioribus.	153	6	A latere secundo in quadruplũ cubum lateris primi.
		34	56	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
		3	456	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1296	Quadrato-quadratum lateris secundi.
	Superioribus.	57	60	A latere secundo in solidum expletionis.
		8	640	A lateris secundi quadrato in planum expletionis.
			4320	A lateris secundi cubo in coefficientem longitudinem.
Summa plano-planorum ablatitiorũ.		258	4176	
Plano-planum addititium.			1344	A latere secundo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo affecto QQ.		258	2832	

Si itaque fuerit æquatio 1QQ + 20C — 224R = 6413872. 1R valor erit 46.

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris.

	1 2
PRopoſita ſit æquatio 1 QQ + 6 C + 4 Q + 10 R = 31800.	31800
A numero 31800 ſubtrahe Quadrato-quadratum primæ figuræ 1; & eſt 1;	1
A reſiduo.	21
Subtrahe 6, numerum factum à cubo primæ figuræ in numerum Cuborum	6
A reſiduo anne xa ſequente figura.	158
Subtrahe 4, numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	4
A reſiduo annexa ſequente figura.	154
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum Radicum.	10
A reſiduo Inuenta ſecunda figura.	1530
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in ſecundam.	80
A reſiduo.	73
Subtrahe ſextuplum quadrati primæ figuræ ductum in quadratũ ſecundę	24
A reſiduo.	490
Subtrahe Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum ſecundæ,	32
A reſiduo.	4580
Subtrahe quadrato-quadratum ſecundæ figuræ.	16
A reſiduo.	4564
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & ſecunda figura.	36
A reſiduo.	964
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato ſecundæ figuræ.	720
A reſiduo.	244
Subtrahe cubum ex ſecunda figura ductum in numerum cuborum.	48
A reſiduo.	196
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ & ſecundæ figuræ in numerum Quadratorum.	160
A reſiduo.	36
Subtrahe numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	16
A reſiduo.	20
Subtrahe numerum factum á ſecunda figura ducta in numerumRadicum; & nihil remanet.	20
	00

Ad indagandam ſecundam ipſam figuram paratur diuiſor modo infra poſito; Aduerte autem nomine primæ figuræ intelligi latus primum quod ſi radix conſtet pluribus figuris, quàm duabus; primæ duę funguntur munere vnius, ut ſępe dictum eſt.

Quadruplus Cubus primæ figuræ.	4
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	6
Quadruplum primæ figuræ	4
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum	18
Triplum primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	18
Numerus Cuborum.	6
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum,	8
Numerus Quadratorum,	4
Numerus Radicum.	710
Summa, & diuiſor.	6720

Para-

Paradigma item aliud analyseos Quadrato-quadrati affecti, per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris.

PRoposita sit æquatio 1 QQ + 12 C + 10 Q + 16 R =	5 0 3 8 0 8
A numero 5 0 3 8 0 8, subtrahatur QQ. primæ figuræ 2, & est 16.	1 6
A residuo.	3 4 3
Subtrahe 8. cubum primæ figuræ 2, ductum in 12, numerum Cuborum.	9 6
A residuo, annexa sequente figura.	2 4 7 8
Subtrahe 4 quadratum primę figuræ ductum in 10. numerum quadratorũ.	4 0
A residuo annexa sequente figura.	2 4 3 8 0
Subtrahe 2, primam figuram ductam in 16, numerum Radicum.	3 2
A residuo Inuenta secunda figura.	2 4 3 4 8 8
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in secundam.	1 2 8
A residuo verò.	1 1 5 4 8
Subtrahe sextuplum quadrati primæ figuræ ductum in Q. secundæ.	3 8 4
A residuo autem.	7 7 0 8
Subtrahe quadruplum primæ figuræ ductum in cubum secundæ.	5 1 2
A residuo verò.	7 1 9 6 8
Subtrahe Quadrato-quadratum secundæ figuræ.	2 5 6
A residuo.	7 1 7 1 2
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figurę ducto in numerum Cuborum, & secunda figura.	5 7 6
A residuo.	1 4 1 1 2
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à Quadrato secundæ.	1 1 5 2
A residuo.	2 5 9 2
Subtrahe cubum ex secunda figura ductum in numerum Cuborum.	7 6 8
A residuo.	1 8 2 4
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ figuræ, & secundæ in numerum Quadratorum.	1 6 0
A residuo.	2 2 4
Subtrahe numerum factum à quadrato secundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	1 6 0
A residuo.	6 4
Subtrahe numerum factum à secunda figura ducto in numerum Radicum.	6 4
	0 0

In præcedenti Paradigmate licet intuari methodum instituendi analysin æquationis in qua QQ afficitur adiunctione, cubi, quadrati, & lateris. Solùm superest adnotare modum indagandi secundam figuram; Aduerte diuisorem parari hac methodo.

Quadruplus Cubus primæ figuræ 2.	3 2
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	2 4
Quadruplum primæ figuræ.	8
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum	1 4 4
Triplum primæ figuræ ductum in numerum cuborum.	7 2
Numerus Cuborum.	1 2
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratum.	4 0
Numerus Quadratorum	1 0
Numerus Radicum,	1 6
Summa, & Diuisor, per quem	
Diuiso 243588, fit quotiens, secunda figura 4. satisfaciens, &c.	5 0 0 3 8

Si

Si itaq; fuerit proposita quædam æquatio, in qua 1QQ + 12C + 10Q + 16R = 503808. Rectè dicemus vnius radicis pretium esse 24; huius enim quadrato quadratum est 331776, & eiusdem cubus est 13824; quapropter 12C, valebunt 165888. Insuper 10Q (quoniam quadratum ipsius 24, est 576) est 5760; demum 16R, pretium erit 384. Porrò hi numeri si vnam summam colligantur, fiet numerus 50808, qui in æquatione munere comparationis homogenei fungitur. Hæc autem cernere licet in adiuncto exemplo quamobrem de his hactenus

331776
165888
5760
384
50808

SCHOLION I.

Quoniam synthesis dictat analysin, haud erit difficile, quæ hactenus explicauimus iuxta methodum Vietæam, demonstrationibus confirmare, cuiuscunq; enim allatæ potestatis affectæ synthesin perpendendo licebit analysin cognoscere, & eandem rectè secundum præscriptam methodum ordinatam esse demonstrare. Nos quidem solùm in æquationibus quadraticis, demonstrationes attulimus, prætermittentes in reliquis, quandoquidem nimiùm opus excrescebat, eoq; libentiùs eas prætereundas silentio duximus, quod ex animaduersione syntheseos, quemadmodum dicebamus, ipsas conijcere citra difficultatem cuicunq; licebit. Quod autem de potestatibus affectis asserimus, de puris quoq; & multò faciliùs intelligendum volumus: quamobrem operæ pretium duximus ibi Theoremata illa synthetica adnotare; quandoquidem iuxta illa fuit instituta analysis. Sed de his hactenus, qua arte commemoratæ æquationes explicari possint intercedentibus numeris irrationalibus &c. (quemadmodum adnotauimus quoq; in Scholio ad paginam 197.) hucusq; deprehensum non est; licebit aliquando fauente Deo, methodum adeo sublimem adinuenire. Cæterum de reductione æquationum hic esset agendum: at quoniam hac de re iterum in Algebra speciosa rediturus, est sermo; proinde nos contemplationem hanc in præsentia prætermittemus, in præcitato loco de ipsa sermonem habituri. Ex æquationibus explicatis, cuicunq; licebit aduertere methodum procedendi in alijs æquationibus; plurimum autem conferet ad analysin rectè instituendam aduertere pretium figuræ ex hac enim obseruatione non erit operosum intelligere locum ipsi figuræ debitum; vnde ipsius resolutionis ordinatio dependet; Si igitur, prima figura sit 1. radix autem vniuersa duabus figuris constet, latus primum erit 10; quamobrem dum dicitur sumendum esse duplum lateris primi illudq; esse 2; intelligere oportet circularem comitantem figuram; quandoquidem latus erat 10; ob id 2, valebit 20; quo fit, vt figura 2; constitui debeat in ordinem denariorum, non vnitatum. Si foret prima figura 2; & vniuersum latus duabus figuris constaret significabit 20; quamobrem duplum ipsius erit 4, assumens 0; vnde fit 40; eius quadratum erit 4; hoc est 400; quo fit, vt duplum illud lateris constitui debeat sic, vt nimirum 2; cadat in loco denariorum sicuti 0, in loco vnitatum ita quoq; dum accipitur 4; pro quadrato illius figura 4; constitui debeat in loco centenariorum; non denariorum; neq; vnitatum. Itaq; in superiori primo exemplo, cum diceretur e. g. sumatur quadruplus cubus primæ figuræ 1; quoniam radix est 12; duabus figuris constans; quadratum primæ est 1, assumens 00; hoc est 100; quapropter eius cubus erit 1000; atq; adeo quadruplus cubus erit 4000; quo fit vt 4; ad indagandum secundum figuram, debeat constitui in ordine milliariorum &c. Quod animaduertisse iuuabat.

Cæterarum methodorum demonstrationes prætermittuntur, non immeritò, cùm facilè eas ex animaduersione syntheseos quisq; possit conijcere.

Nota

SCHOLION II.

Positionem in ænigmatibus enodandis plurimum negotij facessere Analystæ nemo ibit inficias: non erit igitur abs re, nonnulla hoc loco afferre, quę maximè ad positionem instituendam conducunt: hæc autem sunt, quæ deducuntur ex nonnullis quæstionibus Diophanti, è quibus nimirum Canones eliciuntur, vt factum fuit à Xilandro, Bombellio, & Bacheto: non attulimus Canones separatim ab exemplis; sed statim exempla aggressi, regulas explicamus breuitati studentes; eadem enim hic à nobis allata apud commemoratos scriptores videnda copiosiùs pertractata relinquimus.

I. Regula prima. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna superet alteram vnitatibus 16.

Subtrahantur 16, ex 1 R, & remanebit 1 R — 16, hoc autem residuum diuidatur bifariam; eius verò dimidium est ½ R — 8, hoc dimidium est minor pars. Vt autem maiorem ipsam assequamur; eidem ½ R — 8, addantur 16, & fit ½ R + 8, pars maior.

II. Regula 2. Diuidere 16, in duas partes, vt maior superet minorem hoc excessu 1 R.

Subtrahatur 1 R, ex 16, vt remanet 16 — 1 R; hoc autem residuum diuidatur in duas partes æquales, fitq; dimidium 8 — ½ R, & est pars minor. Pars autem maior habetur, si ipsi 8 — ½ R, addatur 1 R, & fit 8 + ½ R.

III. Regula 3. Reperire numerum, quo subtracto ex 1 R, remaneat 16.

Auferantur 16, ex 1 R, vt remaneat 1 R — 16, pro numero quæsito.

IV. Regula 4. Reperire numerum, qui ductus in 16, faciat 1 R.

Diui-

Diuidatur 1 R per 16, vt fiat quotiens $\frac{1R}{16}$, *pro numero quæsito; hic enim ductus in 16, facit 1 R: eodem modo si oporteret diuidere 1 Q, 1 C, &c.*

Regula 5. Numerum reperire, quo diuiso per 1 R, remaneat 16. V.

Ducatur 1 R in 16, & fiet 16 R, & est numerus quæsitus.

Regula 6. Duos numeros reperire in ratione, vt 2, ad 5, & vt eorum summa sit 1 R + 7. VI.

Numeri propositi 2, & 5, in vnam summam colligantur, vt fiat 7; per hunc autem numerum diuidatur 1 R + 7, vt proueniat $\frac{1}{7}$ *R + 1: hac autem summa ducatur in 2, & 5, fit* $\frac{2}{7}$ *R + 2, &* $\frac{5}{7}$ *R + 5; & hi numeri sunt quæsiti.*

Regula 7. Datis duobus terminis 5 + 1 R, & 2 R, alios duos reperire in eadem ratione, & vt eorum summa sit 6. VII.

Ad 5 + 1 R, addantur 2 R, vt fiat summa 5 + 3 R; per quam diuidatur 6, vt fiat $\frac{6}{5+3R}$ *: hæc autem fractio ducatur in 5 + 1 R, & 2 R, vt fiant* $\frac{30+6R}{5+3R}$, *&* $\frac{12R}{5+3R}$ *; hi siquidem numeri sunt in proposita ratione, simulque iuncti, conficiunt 6.*

Regula 8. Datis duobus terminis 5 + 1 R, & 2 R; alios duos in eadem ratione reperire, ita vt eorum differentia sit 6. VIII.

Sumatur ipsorum terminorum differentia, per quam diuidatur datus numerus 6; quotiens autem ducatur in datos terminos: sic enim orientur numeri, seu termini quæsiti.

Regula 9. Duos numeros adinuenire, vt eorum excessus sit 16, subtractoque minoris quadrato, à quadrato maioris remaneat 1 R. IX.

Diuidatur 1 R, per 32, duplum ipsius 16, & fit quotiens $\frac{1}{32}$ *R, ab hac subtrahatur 8, dimidium dati numeri 16, & remanebit* $\frac{1}{32}$ *R — 8, pro minori parte, maior autem erit* $\frac{1}{32}$ *R + 8.*

Regula 10. Diuidere 1 R + 6, in duas partes ea lege, vt ab vna subtracto dimidio, & ab altera subtracta tertia parte, residua sint inter se æqualia. X.

Addantur ad inuicem $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & fiet $\frac{5}{6}$, subductis de 2, remanet $1\frac{1}{6}$, & hoc seruetur. Sumatur dimidium ipsius 1 R + 66, vel tertia pars, & remanet $\frac{1}{3}$ R + 3, hoc diuidatur per $1\frac{1}{12}$, & prouenit $\frac{2}{7}$ R + $2\frac{4}{7}$, eritq; pars vna, altera verò erit $\frac{5}{7}$ R + $3\frac{3}{7}$.

XI. Regula 11. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna ducta in alteram faciat $\frac{1\,C}{120 + 1\,R}$.

Sumatur dimidium numeri radicum, nempe $\frac{1}{2}$ R, eius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q. Ab hoc subtrahatur $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ numerus, quem facere debent, & remanet $\frac{1}{4}\,Q - \frac{1\,C}{120 + 2\,R}$, facta autem subtractione, remanet $\frac{120\,Q - 2\,C}{480 + 8\,R}$.

XII. Regula 12. Diuidere 120 — 1 R, in duas partes, vt inter se ductæ faciant $\frac{1\,C}{120 + 1\,R}$.

Sumatur dimidium ipsius 120 — 1 R, & est 60 — $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum est 3600 — 60 R + $\frac{1}{4}$ Q; quo subtracto ex numero efficiendo $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$, subtrahatur ex $\frac{3600 - 60\,R + \frac{1}{4}\,Q}{1}$, remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C.

$$\frac{1\,C}{120 + 2\,R} \times \frac{3600 - 60\,R + \frac{1}{4}\,Q}{1}$$

$$7200\,R - 120\,Q + \tfrac{1}{2}\,C$$

$$432000 - 7200\,R + 30\,Q$$

$$432000 - 90\,Q + \tfrac{1}{2}\,C$$

Subtrahatur 1 C

Remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C

Qua-

Quamobrem remanebit $\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}$

Huius radix quadrata est ℞ Q $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$

Hoc verò addatur, & subtrahatur dimidio illi $60 - \frac{1}{2}\,R$, *& fit* $60 - \frac{1}{2}\,R -$ ℞ Q $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$ *pars una; pars autem altera erit* $60 - \frac{1}{2}\,R +$ ℞ Q $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$

Regula 13. Diuidere $16 + 1\,R$ in duas partes, adeo vt inter se ductæ producant 40. XIII.

Sumatur dimidium quantitatis diuidendæ; & est $8 + \frac{1}{2}\,R$, *eius quadratum est* $64 + 8\,R + \frac{1}{4}\,Q$, *ab hoc subtrahatur* 40; *fiet* $24 + 8\,R + \frac{1}{4}\,Q$, *eruatur latus quadratum, & est* ℞ Q $(24 + 8\,R + \frac{1}{4}\,Q)$ *cui adbatur* $8 + \frac{1}{2}\,R$, *dimidium quantitatis diuidendæ, & fit* ℞ $(24 + 8\,R + \frac{1}{4}\,Q) + 8 + \frac{1}{2}\,R$, *altera verò pars erit, residuum vsq; ad* $16 + 1\,R$; *nempe* $8 + \frac{1}{2}\,R -$ ℞ $(24 + 8\,R + \frac{1}{4}\,Q)$.

$$
\begin{array}{l}
\quad 8 + \frac{1}{2}R \\
\quad 8 + \frac{1}{2}R \\
\hline
\quad 4R + \frac{1}{4}Q \\
64 + 4R \\
\hline
64 + 8R + \frac{1}{4}Q \\
40 \\
\hline
24 + 8R + \frac{1}{4}Q \\
℞\,Q(24 + 8R + \frac{1}{4}Q) + 8 + \frac{1}{2}R \\
8 + \frac{1}{2}R - ℞\,Q(24 + 8R + \frac{1}{4}Q)
\end{array}
$$

Regula 14. Diuidere $16 - 1\,R$ in duas partes, vt earum quadrata, simul iuncta faciant 56. XIV.

Sumatur quadratum propositæ quantitatis 16 — 1 R, & est 256 — 32 R + 1 Q; à quo subductis 56, remanet 200 — 32 R + 1 Q; huius dimidium est 100 — 16 R + ½ Q; quo subtracto ex 64 — 8 R + ¼ Q, remanet 8 R — ¼ Q — 36; cuius latus est ℞ (8 R — ¼ Q — 36); quo addito ad 8 — ½ R, fit 8 — ½ R + ℞ (8 R — ¼ Q — 36) pars una.

$$\begin{array}{r} 8 - \tfrac{1}{2}R \\ 8 - \tfrac{1}{2}R \\ \hline -4R + \tfrac{1}{4}Q \\ 64 - 4R \\ \hline 64 - 8R + \tfrac{1}{4}Q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 - 1R \\ 16 - 1R \\ \hline -16R + 1Q \\ 256 - 16R \\ \hline 256 - 32R + 1Q \\ 56 \\ \hline 200 - 32R + 1Q \\ 100 - 16R + \tfrac{1}{2}Q \\ \hline 64 - 8R + \tfrac{1}{4}Q \\ 100 - 16R + \tfrac{1}{2}Q \\ \hline 8R - \tfrac{1}{4}Q - 36 \end{array}$$

Altera pars erit ℞ (8 R — ¼ Q — 36)

Hæc nimirum 8 — ½ R — ℞ (8 R — ¼ Q — 36)

$$\begin{array}{r} 8R - \tfrac{1}{4}Q - 36 \\ 64 - 8R + \tfrac{1}{4}Q \\ \hline \tfrac{8}{4}Q - \tfrac{1}{16}QQ - \tfrac{36}{4}Q \\ -64Q + \tfrac{8}{4}C + 288R \\ 512R - 16Q - 2304 \\ \hline 800R - 2304 - 89Q + 4C - \tfrac{1}{16}QQ \end{array}$$

8 —

8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)

8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)

℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ) † 8R — ¼Q — 36)
64 — 8R † ¼Q † ℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ)

28

8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)

— ℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ) † 8R — ¼Q — 36)
64 — 8R † ¼Q — ℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ)

28

Vides igitur supradictas partes, quaestioni satisfacere.

XV. Regula 15. Diuidere 16, in duas partes, ita vt earum quadrata, simul iuncta faciant 256 — 2R.

Sumantur 256 *quadratum numeri diuidendi, & ab his subtrahantur* 256 — 2R, *remanent* 2R; *quibus diuisis per* 2, *fit quotiens* 1R; *qua subtracta de* 64, *quadrato ex* 8, *dimidio numeri* 16, *remanent* 64 — 1R ℞C 64 — 1R); *addatur ad* 8, *vt fiat* 8 † ℞C 64 — 1R), *& haec est pars vna; altera erit* 8 — ℞C 64 — 1R).

XVI. Regula 16. Diuidere 16 † 2R, in duas partes, ea lege, vt vna in aliam ducta tantum faciat, quantum dictarum partium differentia ducta in 18.

Sumatur 8 † 1R, *dimidium propositae quantitatis, addaturque ad* 18, *& fit* 26 † 1R: *huius quadratum est* 676 † 52R † 1Q; *ab hoc autem quadrato subtrahatur* 288 † 36R, *pro-*

productum ex 16 ✠ 2 R in 18, & remanet 388 † 16 R † 1 Q; huius latus est ℞ (388 † 16 R † 1 Q), quod est subtrahen-

26 ✠ 1 R
26 ✠ 1 R
—————
26 R ✠ 1 Q
676 ✠ 26 R
—————
676 ✠ 52 R ✠ 1 Q
288 ✠ 36 R
—————
388 ✠ 16 R ✠ 1 Q
℞ (388 ✠ 16 R ✠ 1 Q)
26 ✠ 1 R — ℞ (388 ✠ 16 R ✠ 1 Q)
—————
16 ✠ 2 R
18
—————
288 ✠ 36 R

dum à 26 † 1 R, & residuum 26 † 1 R — ℞ (388 † 16 R † 1 Q) est pars vna; qua subtracta ex 16 † 2 R, *remanet* ℞ (388 † 16 R † 1 Q) † 1 R — 10, *pro altera parte.*

XVII. Regula 17. Diuidere 12, in duas partes, vt earum quadrata simul iuncta, tantum faciant, quantum faciunt inter se multiplicata, additis 3 R ad productum.

A 144, quadrato propositi numeri 12, subtrahentur 3 R, *vt fiat residuum* 144 — 3 R; *diuidatur per* 3, *& fit quotiens* 48 — 1 R; *hoc autem subtracto ex* 36, *quarta parte numeri* 144, *quadrati ex* 12, *remanet* 1 R — 12; *eius autem latus est* ℞ (1 R — 12), *quo subtracto ex* 6, *dimidio numeri* 12, *remanet* 6 — ℞ (1 R — 12), *& est pars vna; altera verò erit* 6 † ℞ (1 R — 12).

XVIII. Regula 18. Diuidere 16 † 2 R, secundum extremam, & mediam rationem.

Su-

Sumatur 256 — 64 *R* † 4 *Q*, *quadratum propositæ quantitatis, & huic addatur* 64 † 16 *R* † 1 *Q*, *quadratum dimidij propositæ quantitatis, & fit* 320 † 80 *R* † 5 *Q*; *huius* ℞ *est*

16 † 2 R
16 † 2 R

32 R † 4 Q
256 † 32 R

256 † 64 R † 4 Q
64 † 16 R † 1 Q

320 † 80 R † 5 Q

℞ 320 † ℞ 5
8 † 1 R

Pars vna ℞ 320 — 8 † ℞ 5 R — 1 R
16 † 2 R
℞ 320 — 8 † ℞ 5 3 — 1 R

Pars altera 24 — ℞ 320 † 1 R — ℞ 5 R

℞ 320 † ℞ 5 *R*, *à qua subtracto* 8 † 1 *R*, *dimidio propositæ quantitatis remanebit* ℞ 320 — 8 † ℞ 5 *R* — 1 *R*, *pro vna parte; alia verò erit* 24 — ℞ 320 † 1 *R* — ℞ 5 *R*.

Regula 19. Diuidere 16 † 2 R in tres partes continuè proportionales, ea lege, vt earum quadrata simul iuncta faciant 256. XIX.

Sumatur 256 † 64 *R* † 4 *Q*, *quadratum ipsius* 16 † 2 *R*; *à quo subtracto* 256, *remanet* 64 *R* † 4 *Q*; *hoc autem residuum diuidatur per* 32 † 4 *R*, *duplum dati numeri diuidendi, & fit quotiens* $\frac{64 R † 4 Q}{32 † 4 R}$, *& est pars secunda. Partes reliquæ habentur, si iam inuenta subtrahatur* 16 † 2 *R*, *residuum verò diui-*

diuidatur in duas partes, quæ inter se ducta faciant quadratum ex $\frac{64R + 4Q}{32 + 4R}$, *nempè sumatur residuum, & ab eius quadrato subtrahatur quadratum ex dimidio huius* $\frac{64R + 4Q}{32 + 4R}$, *& ex residuo eruatur radix; quæ subtracta ipsimet dimidio relinquit primam, minoremq; partem ex tribus quæsitis, & addita exhibet tertiam, & maiorem.*

XX. Regula 20. Diuidere 1 $\frac{1}{2}$ R + 34 in duas partes, ea lege, vt si vni ipsarum addantur 92, fiat triplum alterius.

Adde ipsis 1 $\frac{1}{2}$ R + 34, *numerum* 92, *& fit* 1 $\frac{1}{2}$ R + 126, *quo diuiso per* 4, *fit quotiens* $\frac{3}{8}$ R + 31 $\frac{1}{2}$, *hic numerus si subtrahatur ipsi* 1 $\frac{1}{2}$ R + 34, *remanebit* 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, *huic enim additis* 92, *fit* 1 $\frac{1}{8}$ R + 94 $\frac{1}{2}$, *triplus illius* $\frac{3}{8}$ R + 31 $\frac{1}{2}$, *qui nimirum si ducatur in* 3, *fit* 1 $\frac{1}{8}$ R + 94 $\frac{1}{2}$.

XXI. Regula 21. Diuidere 14, in tres partes in ratione continua, vt secunda sit 1 R.

Auferatur 1 R, *à* 14, *& remanet* 14 — 1 R, *huius autem dimidium est* 7 — $\frac{1}{2}$ R, *huius verò quadratum est* 49 — 7 R + $\frac{1}{4}$ Q; *à quo si subtrahatur quadratum secundæ, nimirum* 1 Q, *remanet* 49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q; *huius latus est* ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q) *quo subtracto à* 7 — $\frac{1}{2}$ R, *remanet* 7 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q) *& hæc est prima pars. Secunda verò erit* 1 R. *Tertia demum erit residuum vsq; ad* 14; *nempe* 7 — $\frac{1}{2}$ R + ℞ (49 — 7 R — $\frac{3}{4}$ Q).

XXII. Regula 22. Tres quantitates reperire in ratione continua, vt prima, & secunda sint 10 — 1 R, tertia verò 1 R.

Ducatur 1 R *in* 10 — 1 R *& fit* 10 R — 1 Q, *hoc autem addatur quadrato dimidij*, 1 R, *nempe* $\frac{1}{4}$ Q, *& fit* 10 R — $\frac{3}{4}$ Q *huius autem radix est* ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q *à qua subtrahatur* $\frac{1}{2}$ R *dimidium tertiæ partis, & remanet* ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q) — $\frac{1}{2}$ R, *& hæc est secunda pars; quæ subtracta à* 10 — 1 R, *remanet* 10 — $\frac{1}{2}$ R — ℞ (10 R — $\frac{3}{4}$ Q) *& hæc est pars prima; quæ ducta in tertiam* 1 R, *facit* 10 R — $\frac{1}{2}$ Q — ℞ (10 C — $\frac{3}{4}$ QQ) *& est æquale hoc productum quadrato secundæ; hoc enim est pariter* 10 R — $\frac{1}{2}$ Q — ℞ (10 C — $\frac{3}{4}$ QQ).

Regu-

Regula 23. Diuidatur 20 ✠ 1 R in tres partes continuè proportionales, vt prima sit 1 R. XXIII.

Subtrahatur 1 R de 20 ✠ 1 R, remanet 20; qui ductus in primam facit 20 R; cui addito ¼ Q, quarta parte quadrati ex prima fit 20 R ✠ ¼ Q; huius latus est ℞ (20 R ✠ ¼ Q); à quo subtracto ½ R, dimidio primæ, remanet, ℞ (20 R ✠ ¼ Q) — ½ R, pro secunda parte. Tertia verò erit 20 ✠ ½ R — ℞ (20 R ✠ ¼ Q) residuum nimirum vsq; ad 20.

Regula 24. Diuidere 14, in tres partes, continuè proportionales; vt si multiplicetur prima per secundam, & productum per tertiam, fiat 1 C. XXIV.

Sumatur Radix ipsius C, & est 1 R; quamobrem 1 R, erit secunda pars, at verò prima, & tertia reperietur, vt supra regula antecedenti 23.

Regula 25. Duos numeros reperire, vt eorum excessus sit 1 R, quadratorum autem summa sit 20. XXV.

Accipe ½ R; dimidium 1 R; huius quadratum est ¼ Q; quo subtracto ex 10, dimidio dati numeri 20, remanet 10 — ¼ Q; huius autem latus quadratum est ℞ (10 — ¼ Q); à quo demátur ½ R, & remanet ℞ (10 — ¼ Q) — ½ R, pro vno ex numeris quæsitis.

Has autem regulas tradidisse sufficiat, & si plurima alia possent afferri non minus ad ipsam positionem instituendam conducentes. Poterit autem vnusquisq; non sine iucunditate regulas enarratas numeris absolutis applicare, & manifestissimè veritatem deprehendere.

CAPVT XV.

In quo varia exemplorum genera proponuntur ad Artem analyticam illustrandam.

In hoc præsenti capite placuit afferre sex exemplorum genera, in quibus ad praxim reuocata præcepta superiùs tradita conspiciuntur.

Primum exemplorum genus.

PRimum exemplorum genus illud esto Problematum, eorum nimirum, in quibus, vel diuisor est vnitas, vel nulla reductione est opus.

PROBLEMA PRIMVM.

NVmerum inuenire, cui si addantur 10, & ab eodem auferantur 20, summa ad residuum habeat rationem, vt 2, ad 1.

Positio. Numerus quæsitus esto 1 R; cui additis 10, fit 1 R + 10; si verò ex 1 R, auferantur 20, fit residuum 1 R — 20; vt autem est 2 ad 1, ita est 1 R + 10, ad 1 R — 20; proinde si 1 R — 20, multiplicemus per 2, fiet productum 2 R — 40 = 1 R + 10; additis vtrinque 40, fit æquatio 1 R + 50 = 2 R; & vtrinque sublata 1 R, fiet æquatio 1 R = 50; proinde numerus quæsitus erit 50.

$$1R + 10 \qquad 1R - 20$$
$$2$$
$$1R + 10 = 2R - 40$$
$$40$$
$$1R + 50 = 2R$$

Hic

Hic autem numerus quæstioni satisfacit: quandoquidem si numero 50, addantur 10, fiet numerus 60; si verò ab eodem auferantur 20, fiet numerus residuus 30: est autem 60, ad 30, vt 2, ad 1. *Comprobatur superior processus analyticus.*

PROBLEMA SECVNDVM.

Reperire numeros duos inæquales, quorum differentia sit 10, ea tamen lege, vt si minor ducatur in 2, & producto addantur 5, maior autem in 3, & producto addantur 6, fiat maior duplus minoris.

Minor numerus esto 1 R; ergo maior erit 1 R + 10: si minor ducatur in 2, & producto addantur 5, fiet 2 R + 5: si maior ducatur in 3, & producto addantur 6, fient 3 R + 36. Cum itaq; maior duplus sit minoris, si minor duplicetur, erunt 4 R + 10 = 3 R + 36. Si itaq; ab vtraq; parte tollantur 3 R, erunt 1 R + 10 = 36: & rursus ab vtraq; parte sublatis 10, remanebit 1 R = 26. Proinde minor numerus quæsitus erit 26; maior autem erit 36: qui habetur additis 10, ad 26; & hi duo numeri satisfaciunt quæstioni. *Positio.*

1 R	1 R + 10
2	3
2 R	3 R + 30
5	6
2 R + 5	3 R + 36

4 R + 10 = 3 R + 36
3 R
———
1 R + 10 = 36
10
———
1 R = 26

PROBLEMA TERTIVM.

NVmerum reperire ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, si tollantur 60, remaneant 80.

Positio. Quæsitus numerus esto 1 R; partes eius supradictæ sunt $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{6}$ R, quarum summa est 1 R: à qua si auferantur 60, remanebit 1 R — 60 = 80: vtrique autem parti additis 60, fiet æquatio 1 R = 140. Et 140, est numerus quæsitus Problemati satisfaciens: numeri enim 140, dimidium est 70, tertia pars est 46 $\frac{2}{3}$, sexta verò pars est 23 $\frac{1}{3}$; ab his autem partibus simul sumptis, quæ nimirum faciunt 140, si tollantur 60, remanent 80. *Comprobatur.*

PROBLEMA QVARTVM.

NVmerum reperire, qui additus numero 60, faciat 130.

Positio. Quæsitus numerus esto 1 R: hæc addita numero 60, facit 1 R + 60; sed efficere debet 130: ergo 1 R + 60 = 130; vtrinque ablatis 60, remanebit 1 R = 70: erit igitur 1 R, valor 70, numerus Problemati satisfaciens.

PROBLEMA QVINTVM.

NVmerum inuenire ex cuius $\frac{1}{3}$, si subtrahantur 15, residuum ducatur in 3, proueniant 70.

Quæsitus numerus esto 1 R; ex cuius $\frac{1}{3}$, si tollantur 15, remanebit $\frac{1}{3}$ R — 15: his autem ductis in 3, proueniet 1 R — 45; & erit æquatio 1 R — 45 = 70; vtriq; parti additis 45, fiet æquatio 1 R = 115: erit igitur quæsitus numerus 115, Problemati satisfaciens.

PROBLEMA SEXTVM.

PRopositi sint duo numeri 30, & 40, sintq; reperiendi duo alij in ratione quadrupla, vt si maior addatur ad

30,

30, & minor ad 40, numeri conflati rationem habeant triplam.

Primus ex numeris quæsitis esto 1R: secundus erit 4R. Si prioribus addantur, vt præcipitur, fient 30 ✢ 1R, & 40 ✢ 4R. Hi autem numeri cum sint in ratione tripla, ducatur minor, nempe 30 ✢ 1R in 3, & fiet æquatio 90 ✢ 3R ⚌ 40 ✢ 4R, vtrinq; ablatis 3R, erit 90 ⚌ 40 ✢ 1R: vtrinq; ablatis 40, remanebit 50 ⚌ 1R. Quæsitus igitur numerus erit 50, huius quadruplum est 200. Si verò 50, addantur ad 30, fient 80, & si 200, addantur ad 40, fient 240, liquet autem esse 240, ad 80, vt 3 ad 1. *Positio.* *Comprobatur.*

PROBLEMA SEPTIMVM.

NVmerum reperire, ex quo si tollantur 6, & residui $\frac{1}{3}$, addantur 10, summa verò hæc ducatur in 3, & rursus ex producto tollantur 24, remaneant 60.

Quæsitus numerus esto 1R: ex hac si tollantur 6, remanet 1R — 6; tertia pars est $\frac{1}{3}$R — 2; cui si addantur 10, fiet $\frac{1R + 24}{3}$: hæc autem ducta in 3, facit 1R ✢ 24, ex hac si tollantur 24, remanet 1R, quæ æquabitur 60: & ita 60, est numerus Problemati satisfaciens. *Positio.*

PROBLEMA OCTAVVM.

NVmerum reperire, cui si addantur 10, & ex eodem auferantur 14, & ex conflati, residuiq; summa tollatur ipse numerus, atq; residuo addantur 4, fiant 35.

Quæsitus numerus esto 1R: cui si addantur 10, fiet 1R ✢ 10; si eidem radici auferantur 14, fiet 1R — 14; horum summa est 2R — 4; hinc si auferatur idem numerus, nimirum 1R, fiet 1R — 4; huic si addantur 4, fiet 1R ⚌ 35: igitur idem numerus 35, satisfacit. *Positio.*

PROBLEMA NONVM.

Dvos numeros reperire, quorum differentia sit 36, ea lege, vt si quartam partem summa illorum ducam in 2, ex producto verò tollam 18, remaneat 10.

Positio. Minor numerus quæsitus esto 1 R: maior igitur erit 1 R ✠ 36. Vtriusque summa est 2 R ✠ 36: quarta autem pars ½ R ✠ 9; quæ ducta in 2, facit 1 R ✠ 18: vnde si subtrahamus 18, remanebit 1 R, æqualis 10; ob id numerus minor quæsitus erit 10, maior autem erit 46.

SCHOLION.

Innumera alia Problemata ad hoc primum genus spectantia potuissent afferri, nobis tamen breuitati consulentibus hactenus allata visa sunt sufficere.

Secundum exemplorum genus.

AD hoc genus exempla pertinent eorum Problematum, quibus per solam diuisionem fit satis; diuiso quando-quidem comparationis homogeneo per numerum digitatis, Radicis pretium inotescit.

PROBLEMA PRIMVM.

Ex Diophanto, q. prima, libri primi. Hypothesis. *PRopositum numerum in duas partes diuidere, quarum data sit differentia.*

Propositus si numerus 100, diuidendus in duas partes, quæ differant dato numero 30. *Positio.* Pars minor esto 1 R; maior igitur erit 1 R ✠ 30: harum summa est 2 R ✠ 30; sed esse debet 100: ob id 2 R ✠ 30, æquabuntur 100: vtrinq; ablatis 30, erit æquatio inter 2 R, & 70; diuisis autem 70, per 2, fit quotiens 35, & pars minor; pars autem

tem maior erit 65, & satisfaciunt quæstioni: propterea quod harum partium summa est 100, earum autem differentia est 30, vt patet.

PROBLEMA SECVNDVM.

Propositum numerum in duas diuidere, vt quædam determinatæ partes maioris, æquales sint parti minori, assumpto aliquo determinato numero.

Iniunctum sit diuidere 100, in duas partes, vt $\frac{2}{3}$ maioris partis æquales sint minori plus 10. *Hypothesis.* Maior pars esto 1 R; ergo minor erit 100 — 1 R; maioris autem $\frac{2}{3}$ sunt $\frac{2}{3}$ R, *Positio.* minor verò si assumat 10, erit 110 — 1 R: erit igitur æquatio huiusmodi $\frac{2}{3}$ R = 110 — 1 R: vtrinq; addita 1 R, fiet 1 $\frac{2}{3}$ R = 110. Diuisis igitur 110, per 1 $\frac{2}{3}$ R, fiet quotiens 66, & pars maior; minor autem erit 34: duæ autem tertiæ partes illius sunt 44; & si 34, parti minori addantur 10, fient 44.

PROBLEMA TERTIVM.

Propositum numerum in duos partiri in data ratione. *Ex Diophanto q. 2. lib. primi.*

Propositum sit diuidere 100, in duas partes, quæ sint inter se vt 7, ad 3. *Hypothesis.* Pars vna esto 3 R, alia verò 7 R; ex his *Positio.* summa est 10 R: ergo erit æquatio 10 R = 100; diuisione instituta, fit quotiens, & 1 R valor 10: ob id pars posita 3 R, erit 30; altera, quæ ponebatur 7 R, erit 70, & satisfaciunt; namq; summa ipsarum est 100; & sunt inter se vt 7 ad 3.

PROBLEMA QVARTVM.

Numeros reperire, qui sint in proportione vt 5 ad 7, & si multiplicetur minor per 4, maior autem per 3, numeri producti simul additi faciant 123.

Mi-

Positio. Minor ex numeris quæsitis esto 5 R: alter erit 7 R. Modò ducantur 5 R, per 4, & fient 20 R: & multiplicatis 7 R, per 3, producentur 21 R. Harum summa est 41 R; quæ debent esse æquales numero 123. Diuisione autem instituta, fiet quotiens 3, numerus igitur quæsitus minor erit 15, cum ille poneretur 5 R: maior autem erit 21, cum poneretur 7 R; & satisfaciunt quæstioni.

PROBLEMA QVINTVM.

Ex Diophante q. 3. lib. 1.

PRopositum numerum in duos partiri, in data ratione, dataq; differentia.

Hypothesis. Sit iniunctum diuidere 100, in duos numeros, adeo vt maior minoris, sit quintuplus, & adhuc sex vnitates superaddat. *Positio.* Minor esto 1 R: maior igitur erit 5 R + 6; hoc enim pacto maior minoris est quintuplus, & adhuc sex vnitates superaddit. Horum autem summa est 6 R + 6; quæ æquabitur 100. Ablatis similibus à similibus, ob id, 6 R = 94. Diuisione institu a, fiet 1 R valor $15 \frac{2}{3}$. Ad positiones minor erit $15 \frac{2}{3}$: maior autem habebitur si $15 \frac{2}{3}$ multiplicentur per 5; & producto addantur 6, cum maior ipse poneretur 5 R + 6, eritq; $84 \frac{1}{3}$.

Aliter. Positio. Vel maior esto 1 R: à qua demptis 6, remanet 1 R — 6, minoris quintuplum; proinde minor erit $\frac{1}{5}$ R — $1 \frac{1}{5}$: summa vtriusq; nempe $1 \frac{1}{5}$ R — $1 \frac{1}{5}$, æquabitur 100; vtrinq; addito $1 \frac{1}{5}$, fiet æquatio $1 \frac{1}{5}$ R = $101 \frac{1}{5}$. Diuisione instituta, fit 1 R, valor $84 \frac{1}{3}$, & maior numerus quæsitus; minor autem erit $15 \frac{2}{3}$. Cæterum ex operatione superiori loco posita talis elicitur

CANON.

Canon ex operatione deducitur.

SVme duos numeros in ratione data, & per illorum summam diuide datum numerum dato interuallo multatum, quotientem si ducas in minorem sumptorum, fiet minor ex numeris quæsitis.

PROBLEMA SEXTVM.

Ex Diophāto q. 4. lib. primi.

DVos numeros reperire, qui & datam rationem, & datum seruent interuallum.

Hypothesis. Positio prima.

Sit iniunctum maiorem minoris esse sextuplum, interuallum autem ipsorum esse 30. Minor esto 1 R, maior igitur erit 6 R, hoc enim pacto maior est sextuplus minoris; superest, vt horum interuallum sit æquale vnitatibus 30. Fiet igitur diuisione instituta 1 R, valor 6; minor igitur erit 6, maior autem 36, atq; adeo maiore existente sextuplo minoris, interuallum est 30.

Aliter. Positio 2.

Secundò potest etiam operatio hoc modo institui. Maior esto 1 R, minor igitur erit $\frac{1}{6}$ R, horum interuallum est $\frac{5}{6}$ R, æquale 30. Diuisione instituta fit quotiens, & 1 R valor, & maior numerus quæsitus 36.

Ex his autem duobus operationibus hic elicitur

CANON.

Canon ex operatione deductus.

SVme duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum; quotiens enim ductus in sumptos numeros, quæsitos numeros exhibebit.

Aliter. Positio 3.

Tertiò esto minor 1 R, maior igitur erit 1 R + 30, qui cum sit minoris sextuplus, erunt proinde 6 R = 1 R + 30, & ablatis similibus à similibus remanebit æquatio huiusmodi 5 R = 30. Diuisione instituta fit 1 R valor, & minor numerus quæsitus 6, maior proinde 36.

Aliter. Positio 4.

Quartò maior esto 1 R, minor igitur erit 1 R — 30, hic cum sit sexta pars maioris, erit $\frac{1}{6}$ R = 1 R — 30, seu 1 R = 6 R — 180. Additis 180, vtrinq; fit æquatio 1 R + 180 = 6 R, vtrinq; ablata 1 R, fiet 5 R = 180, diuisione autem instituta fiet 1 R, valor, & maior numerus quæsitus 36, vt priùs, minor autem 6, & satisfaciunt quæstioni.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Ex Diophanto lib. 1. qu. 5.

PRopositum numerum in duos numeros diuidere, vt horum vtriusq; non tamen eadem data partes, si coniungantur datum numerum conficiant. Oportet autem talem hunc dari, qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur.

Hypothesis. Positio. Sit iniunctum diuidere 160, in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi septima pars, si coniungantur efficiant 50. Secundi septima pars esto 1 R, igitur ipse secundus erit 7 R, quare primi tertia pars erit 50 — 1 R, hoc enim modo tertia pars primi cum septima parte secundi efficiunt 50, erit igitur ipse primus 150 — 3 R, si verò hi numeri coniungantur debent efficere 160, sed simul iuncti efficiunt 4 R ✝ 150, ob id erit æquatio 4 R ✝ 150 = 160. Vtrinq; auferantur 150, remanebit æquatio 4 R = 10. Diuisione instituta fiet quotiens $2\frac{1}{2}$ ad positiones. Primus numerus positus 150 — 1 R, erit $142\frac{1}{2}$. Secundus autem, qui ponebatur 7 R, erit $17\frac{1}{2}$, horum summa est 160, & secundi septima pars est $2\frac{1}{2}$, quæ cum $47\frac{1}{2}$, tertia parte primi $142\frac{1}{2}$, faciat 50.

Cur autem duas veluti conditiones Diophantus apposuerit, declarat elegantissimè Bachettus in suis Comentarijs: consule illum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Ex Dioph. q. 6. lib. 1.

PRopositum numerum in duos numeros partiri, vt prioris data pars, posterioris datam partem, superet dato numero. Hunc autem minorem esse oportet eo, qui fit, si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedat.

Hypothesis. Sit iniunctum 190, in duos numeros diuidere, vt prioris triens, posterioris quintantem 10, vnitatibus superet.

Positio. Quintans posterioris numeri quæsiti esto 1 R, ipse proinde erit 5 R. Triens autem prioris erit 1 R ✝ 10, ipse ob

id

id erit 3 R + 30, horum autem summa debet esse 190, sed est 8 R + 30, proinde erit æquatio 8 R + 30 = 190, ablatis similibus a similibus relinquetur æquatio huiusmodi 8 R = 160. Diuisione instituta fit quotiens, & 1 R valor 20, quamobrem numerus posterior, cuius quintans erat positus 1 R, erit 100, alter autem prior, cuius triens ponebatur 1 R + 10, erit 30, & satisfaciunt, nàm tertia pars numeri 90, est 30, quæ superat 20, quintam partem huius numeri 100, hoc excessu 10, &c.

Quinque alijs modis potest fieri satis propositę quęstioni, sed hæc videri possunt apud Xilandrum, & Bachettum. Sic enim secundò posset institui positio. Prioris triens esto 1R, ipse prior erit 3 R, quintans posterioris erit 1R — 10, ipseq; posterior 5 R — 50, horum summa 8 R — 50 = 190, ac demum 8 R = 240, diuisione instituta fit 1R, valor 30. Ad positiones triens prioris erat 1 R, ergo 30; ergo totus numerus erit 90, at posterioris quintans erat 1 R — 10, proinde 20, liquet autem 30, trientem prioris, superare 20, quintantem posterioris excessu 10. *Positio 2.*

Tertiò. Prior numerus esto 1 R, ergo quintans secundi erit $\frac{1}{3}$ R — 10, hoc enim pacto triens prioris, superabit quintantem posterioris excessu 10, ipse igitur secundus erit $1\frac{2}{3}$ R — 50, horum summa $2\frac{2}{3}$ R — 50 = 190; ergo $2\frac{2}{3}$ R = 240, proinde 1 R, valor erit 90, &c. *Positio 3.*

Quartus modus est huic respondens, si secundus ponatur 1 R, &c. *Positio 4.*

Quintò. Primus esto 1 R, ergo secundus erit 190 — 1 R, primi triens est $\frac{1}{3}$ R, secundi quintans est 38 — $\frac{1}{5}$ R, huic addito 10, fit 48 — $\frac{1}{5}$ R = $\frac{1}{3}$ R, & fiet 1 R, valor 90, vt priùs. *Positio 5.*

Sextò deniq; potest institui operatio huic respondens, si secundus ponatur 1 R, primus erit 190 — 1 R, secundi quintans est $\frac{1}{5}$ R, primi triens $63\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, & erit $\frac{1}{5}$ R + 10 = $63\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, atq; adeo $\frac{8}{15}$ R = $53\frac{1}{3}$. Fiet autem 1 R, valor 100, & secundus numerus quæsitus. Ex hisce duobus vltimis operationibus elicitur *Positio 6.*

CANON.

Canon ex operationibus deductus.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minori adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiori, summam, & residuum diuide seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, & orientur numeri quæsiti.

PROBLEMA NONVM.

Ex Dioph. lib. 1. q. 7

Ab eodem numero duos datos numeros auferre, vt residui datam rationem seruent.

Hypothesis.

Sit iniunctum ab eodem numero auferre 100, & 20, vt maius residuum, minoris sit triplum.

Positio.

Numerus quæsitus esto 1 R, ab hoc autem subductus 100, residuum erit 1 R — 100, ab eodem subductis 20, relinquitur 1 R — 20, cum autem residuum maioris nempe 1 R — 20, triplum esse debeat minoris, ob id ter ipsum minus residuum maiori æquabitur; quamobrem 3 R — 300, æquabuntur 1 R — 20. Vtrinque addito communi defectu, fiet æquatio huiusmodi 3 R $=$ 1 R + 280, similibus subductis à similibus, fiet æquatio 2 R $=$ 280; diuisione instituta fiet 1 R, pretium 140. Cum ergo quæsitus numerus poneretur 1 R, ob id erit vnitatum 140, qui quidem numerus satisfacit; nàm si à 140, subtrahamus 100, remanet 40; si subtrahamus ab eodem 20, remanet 120; constat autem 120, ad 40, habere rationem, vt 3 ad 1. Hinc elicitur

CANON.

Canon ex operatione deductus.

Maior datorum numerorum ducatur in denominatorem rationis postulatæ, à producto autem auferatur minor. Residuum autem diuidatur per denominatorem rationis vnitate multatum, & orietur numerus quæsitus.

Po-

Potest etiam institui Analysis hoc modo. Defectus quo 100, deficit à quæsito numero esto 1 R, igitur numerus quæsitus erit 1 R + 100, cum autem defectus, quo 20, deficit ab eodem quæsito numero triplus sit defectus quo 100, ab eodem deficit; erit ipsius 20, defectus 3 R, ob id numerus quæsitus erit 3 R + 20. Proinde æquales erunt 1 R + 100, & 3 R + 120, reperiemus autem 1 R, valorem esse 40, Atq; adeo numerus quæsitus erit 140, & hinc etiam elicitur *Aliter.*

CANON.

Datorum numerorum interuallum diuidatur per denominatorem rationis unitate multatum, orietur enim defectus maioris numeri à numero quæsito, quo ei addito fiet quæsitus numerus. *Canon ex hac operatione deductus*

PROBLEMA DECIMVM.

Duobus datis numeris, eundem adijcere numerum, vt compositi ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem rationem datam minorem ea esse, quam habet maior datorum numerorum ad minorem. *Ex Dioph. q. 8. lib. 1.*

Sit iunctum ad 80, & ad 10, eundem adijcere numerum, vt maius compositum minoris sit triplum. Numerus addendus esto 1 R, is si ad 80, addatur, fiet 1 R + 80, si verò ad 10, fiet 1 R + 10, debet autem compositum maius esse triplum compositi minoris; ter igitur minus compositum æquabitur maiori. At verò ter minus compositum est 3 R + 30, hoc igitur æquabitur 1 R + 80, auferantur autem similia à similibus, & remanebit æquatio huiusmodi 2 R = 50. Diuisione instituta fit 1 R, pretium 25, & hic numerus satisfacit quæstioni. *Hypothesis Positio.*

Conditionis oppositæ rationem facile est assignare; nam *Si duobus æqualibus numeris, inæquales duo adijciantur, erit compositorum minor ratio, quàm auctorum;* consule Bachetũ. *Canon ex operatione deducitur.*

PRO-

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

Ex Dioph. q. 8. lib. secundi.

PRopositum numerum quadratum in duos numeros quadratos diuidere.

Sit iniunctum diuidere 100, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus esto 1 Q, alter erit 100 — 1 Q hoc enim pacto simul iuncti efficient 100, debent autem simul æquari numero quadrato, & quia non ad aliud restringitur quæstio, quam vt simul iuncti propositi numeri quadratum efficiant; satis erit concipere quadratum, cuius latus sit 10; latus eiusdem numeri dati diuidendi, Sed minus tot radicibus, quot libuerit esto igitur illud 10 — 3 R, eius quadratum est 100 — 60 R + 9 Q hoc autem æquabitur 100 — 1 Q, vt videlicet 100 — 1 Q, æquetur quadrato; & per antithesin erit 10 Q = 60 R, ac proinde 1 R, valor erit 6, ergo quadratum vnum erit 36, alterum erit 100 — 36, nempe 64.

Diuid re 36. numerū in duos numeros quadratos.

Sit iniunctum diuidere 36, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus esto 1 Q alter erit 36 — 1 Q, hoc enim pacto simul sumpti conficient 36, debent autem simul æquari numero quadrato &c, quadratum illud sit tale, vt eius latus sit 6 — 3 R, huius quadratum est 36 — 36 R + 9 Q, & hoc æquabitur 36 — 1 Q, & per antithesin 10 Q = 36 R, atq; adeo, per hypobibasmum 10 R = 36, igitur 1 R valor erit $3\frac{3}{5}$ huius quadratum est $12\frac{24}{25}$ aliud quadratum erit $23\frac{1}{25}$, hic autem numerus est quadratus, cuius radix est $4\frac{4}{5}$. Hinc autem deducitur

CANON.

Canon ex operatione deductus.

SVmatur numerus ad libitum; ducaturq; in latus propositi quadrati; eius duplum diuidatur per quadratum illius plus vno; nam quadratum quotientis, erit vnum ex quæsitis quadratis; residuum autem vsque ad totum numerum diuidendum erit aliud quadratum.

PRO-

PROBLEMA DECIMVMSECVNDVM.

Duos numeros quadratos reperire in dato interuallo. *Ex Dioph. q. 11. lib. 2.*

Sit iniunctum reperire duos numeros quadratos, quorum interuallum sit 56, latus quadrati vnius ex quæsitis esto 1 R, aliud erit 1 R, plus numero quocunq; dummodo quadratum ipsius minus sit quam 56; sitq; numerus 4. Itaq; erit 1 R + 4, illius quadratum est 1 Q, istius autem est 1 Q + 8 R + 16, horum differentia est 8 R + 16, quæ æquabitur 56, ac demum erit æquatio 8 R = 40, si nimirum vtrinq; auferantur 16, diuisione instituta fit 1 R, valor 5. Proinde numerus positus 1 R, erit 5; alter autem 9, siquidem ponebatur 5 + 4, horum quadrata 25, & 81; quorum differentia est 56, ex hac autem operatione talis elicitur *Hypothesis Positio.*

CANON.

Sumatur quicunque numerus quadratus minor dato interuallo, ipseq; subtrahatur à dato interuallo, residuum diuidatur per duplum lateris sumpti quadrati; orietur enim vnum latus ex quæsitis duobus. Si verò huic addatur latus sumpti quadrati, fiet latus alterum. *Canon elicitus ex superiori æquatione.*

Aliter etiam operatio potest institui, vide apud Bachetum in comentarijs supra Diophantum.

Tertium genus exemplorum.

AD hoc genus ea Problemata pertinent, in quorum analysi composita æquatio occurrit, in eaq; requiritur radicis extractio. Horum problematum analysis magis operosa est, ob id longe præstantior. Nonnulla igitur Problemata lubet hic in medium afferre, vt nimirum præcepta

cepta superiùs tradita ad praxim reuocata videantur; quęmadmodum, factum fuit in exemplis simplicis æquationis.

PROBLEMA PRIMVM.

Datum numerum in duas partes diuidere, vt earum quadrata simul iuncta determinatum numerum efficiant.

Hypothesis. Positio. Propositum sit diuidere 12. in duos numeros, quorum quadrata efficiant simul iuncta 80. Pars vna esto 1 R altera erit 12 — 1R, horum quadrata sunt 1 Q, & 144 — 24 R + 1 Q, horum summa est 144 — 24 R + 2Q, quæ ęquatur 80. Additis vtrinq; 24R, fit 144 + 2Q = 80 + 24R, sublatis vtrinque 80, fit æquatio 64 + 2Q = 24R, vtrinq; sublatis 2 Q fit 24R — 2Q = 64; diuisione instituta per 2, numerum maioris characteris, fit 12R — 1Q = 32, huius autem radix est 8. Si quidem dimidium numeri radicum est 6, huius quadratum est 36, à quo subducto 32, remanet 4, cuius latus quadratum est 2, hoc si addatur 6, dimidio numeri radicum fit 8, pro 1 R valore, si verò 8, auferatur ex 12, remanebit 4, erunt igitur duo numeri 8, 4, horum quadrata sunt 64, 16, quorum summa est 80, vt Problema iubet.

PROBLEMA SECVNDVM.

Duos numeros reperire quorum quadrata dato internallo differant, & inuicem multiplicata producant determinatum numerum.

Hypothesis. Positio. Iniunctum sit reperire duos numeros, quorũ productum sit 160, & eorum quadrata differant per numerum 156. Numerus minor ex duobus quæsitis esto 1 R, maior igitur erit $\frac{160}{1R}$, hoc enim pacto vnus in alium ductus producit 160. Horum autem quadrata sunt 1Q, & $\frac{25600}{1Q}$: istorum au-

autem differentia est $\frac{25600}{1\,Q}$ — 1 Q, & hæc æqualis est
dato numero 156: vtrinq; addito 1 Q, erit $\frac{25600}{1\,Q} = 156$
✠ 1 Q; tollatur fractio per multiplicationem in crucem
quemadmodum ars præcipit, & erit 25600 = 156 Q
✠ 1 QQ. Dimidium numeri radicum est 78, cuius qua-
dratum 6084, additum numero absoluto 25600, fit sum-
ma 31684; huius radix quadrata est 178, à qua subducto
78, dimidio numeri radicum, remanet 100: & quia erat
æquatio inter QQ ✠ Q, & N, ideo iterum extrahatur ra-
dix quadrata ex 100, & est 10, ob id numerus positus 1 R,
erit 10, alter positus $\frac{160}{1\,R}$, erit 16, nempe quotiens emer-
gens ex diuisione numeri 160, per 10, Radicis pretium.
Hi porro duo numeri Problemati satisfaciunt, quando-
quidem vnus in alium ductus facit 160; eorumdem qua-
drata differunt hoc interuallo dato, puta 156.

PROBLEMA TERTIVM.

*DVos numeros reperire, quorum differentia sit data, & in-
ter se ducti faciant determinatum numerum.*

Sit iniunctum reperire duos numeros, quorum differen- *Hypothesis,*
tia sit 6, & inuicem multiplicati faciant 352. Vnus ex nu- *Positio,*
meris quæsitis esto 1 R, alter erit 1 R ✠ 6, si inuicem mul-
tiplicentur, producetur 1 Q ✠ 6R = 352. Huius au-
tem æquationis radix est 16, numerus igitur minor posi-
tus 1 R, erit 16, alter positus 1 R ✠ 6, erit 22, & satisfa-
ciunt.

PROBLEMA QVARTVM.

*PRopositum numerum in duas partes diuidere, ea lege, vt in-
ter se ducta progignant datum numerum.*

Hypothesis. *Positio.* Iniunctum sit diuidere 20, in duas partes, quæ inter se ductæ faciant 75. Pars vna esto 1R, altera erit 20 — 1R, hæ inuicem multiplicatæ faciunt 20R — 1Q; hoc autem productum æquabitur 75. Huius æquationis radix sic habetur. Dimidium numeri radicum est 10, cuius quadratum est 100, à quo si subtrahatur 75, remanet 25. Cuius radix quadrata est 5, quæ ablata, & addita 10, dimidio numeri radicum, fiunt partes quæsitæ 5, & 15, quæstioni satisfacientes.

PROBLEMA QVINTVM.

NVmerum reperire, qui auctus dato quodam numero, & diminutus, seu multatus itidem alio quodam numero, aggregatum, & residuum inuicem multiplicata producant determinatum numerum.

Hypothesis. *Positio.* Propositum sit reperire numerum, qui auctus quodam alio puta 10, multatus autem alio, nempe 15, aggregatum, & residuum faciant 9350, si nimirum inuicem multiplicentur. Quæsitus numerus esto 1R, ergo auctus 10, vnitatibus erit 1R + 10, diminutus 15 vnitatibus, erit 1R — 15. Hi autem numeri inter se ducti faciunt 1Q — 5R — 150, & hoc æquatur numero 9350, factaq; reductione, iuxta artis præcepta, erit æquatio 1Q — 5R = 9350. Huius autem radix sic habetur. Dimidium numeri radicum est $2\frac{1}{2}$, huius quadratum est $6\frac{1}{4}$, cui si addatur 9350, numerus absolutus, nempe comparationis homogeneum fit $9356\frac{1}{4}$, hoc est $\frac{37425}{4}$, huius autem radix quadrata est $\frac{195}{2}$, nempe $97\frac{1}{2}$, cui additio $2\frac{1}{2}$, dimidio numeri radicum fit 100, numerus quæsitus, qui auctus 10, vnitatibus fit 110, multatus 15, remanet 85: constat autem, si ducatur 110, in 85, fieri 9350, vt Problema præcipit.

1 R + 1 0
1 R — 1 5

— 1 5 R — 1 5 0
1 Q + 1 0 R

1 Q — 5 R — 1 5 0 = 9 3 5 0
1 5 0

1 Q — 5 R = 9 5 0 0
$2\frac{1}{2}$ $6\frac{1}{4}$

$2\frac{1}{2}$ $9506\frac{1}{4}$

4
2 3 8 0 2 5

$6\frac{1}{4}$ 4

1
1 9 5
$97\frac{1}{2}$
2 $2\frac{1}{2}$

1 0 0

PROBLEMA SEXTVM.

Propositum numerum in duas partes diuidere, vt eorum quadrata adinuicem multiplicata, producant determinatum numerum.

Sit iniunctum diuidere 16, in duas partes, vt earum quadrata inuicem multiplicata producant 2 3 0 4. Pars vna esto 8 + 1 R, altera erit 8 — 1 R. *Hypothesis, Positio.*

8 — 1 R 8 ✠ 1 R
8 — 1 R 8 ✠ 1 R

— 8 R ✠ 1 Q — 8 R ✠ 1 Q
64 — 8 R 64 ✠ 8 R

64 — 16 R ✠ 1 Q 64 ✠ 16 R ✠ 1 Q
64 — 16 R ✠ 1 Q

64 Q ✠ 16 C ✠ 1 QQ
— 1024 R — 256 Q — 16 C
4096 ✠ 1024 R ✠ 64 Q

4096 — 128 Q ✠ 1 QQ = 2304
128 Q 128 Q

4096 ✠ 1 QQ = 2304 ✠ 128 Q
2304 2304

1792 ✠ 1 QQ = 128 Q
1 QQ 1 QQ

128 Q — 1 QQ = 1792

64
64
256
384
4096
1792
2304
48

64
48
16
4 ∶ 1 R valor.

Si

Si procedatur iuxta Artis præcepta, reperiemus partes quæsitas esse 12, & 4. Pars enim vna dum est 8 + 1 R, eius quadratum erit 64 + 16 R + 1 Q: altera dum ponitur 8 — 1 R, quadratum eius erit 64 — 16 R + 1 Q: hæc autem quadrata inuicem multiplicata producunt 4096 — 128 Q + 1 QQ, quæ æquabuntur 2304, & per antithesin fiet æquatio 128 Q — 1 QQ = 1792; huius autem æquationis radix est 4. Obseruandum autem, cum maior potestas sit 1 QQ, bis radicem quadratam extrahendam esse, atq; adeo ex numero 2304, extracta radice quadrata 48, & hac subtracta ex 64, dum remanet 16, rursus ex 16, extrahi debet radix quadrata.

Rursus diuidatur 12, in duas partes, vt dictum est, ea lege, vt earum quadrata inuicem multiplicata faciant 130. *Hypothesis secunda.*

Pars vna esto 6 + 1 R, altera erit 6 — 1 R, illius quadratum est 36 + 12 R + 1 Q, istius verò est 36 — 12 R + 1 Q, quadrata istarum inter se ducta faciunt 1296 — 72 Q + 1 QQ, & hoc productum æquatur 130; fit autem per antithesin æquatio ista 72 Q — 1 QQ = 1166. *Positio.*

6 + 1 R
6 + 1 R
———————
6 R + 1 Q
36 + 6 R
———————
36 + 12 R + 1 Q
6 — 1 R
6 — 1 R
———————
— 6 R + 1 Q
36 — 6 R
———————
36 — 12 R + 1 Q
36 + 12 R + 1 Q
———————
36 Q — 12 C + 1 QQ
432 R — 144 Q + 12 C
1296 — 432 R + 36 Q
———————
1296 — 72 Q + 1 QQ = 130.

72 Q — 1 QQ = 1166

36
36
————
1296
1166
————
130

36 — ℞ 130

℞ (36 — ℞ 130)

6 + ℞ (36 — ℞ 130)
6 + ℞ (36 — ℞ 130)
————————————
℞ (1296 — ℞ 168480) + 36 — ℞ 130
36 + ℞ (1296 — ℞ 168480)
————————————
72 — ℞ 130 + ℞ (5184 — ℞ 2695680)
72 — ℞ 130 — ℞ (5184 — ℞ 2695680)
————————————
— ℞ 673920 + 130 — 5184 — ℞ 2695680
5184 — ℞ 673920
130
————————————
5314 — ℞ 6795680
— 5184 — ℞ 6795680
————————————
130

Itaq; instituta operatione, vt vides, fiet 1 R, prętium ℞ Q (36 — ℞ 130); quamobrem pars vna posita 6 + 1 R, erit 6 + ℞ (36 — ℞ 130) altera verò, quę posita fuit 6 — 1 R, erit 6 — ℞ (36 — ℞ 130) & satisfaciunt Problemati; quandoquidem quadratum vnius ductum in quadratum alterius facit 130; & vna addita alteri facit 12, vti perspicuum est.

PRO-

PROBLEMA SEPTIMVM.

Propositum numerum in quatuor partes diuidere in ratione continua, vt quadrata singularum simul iuncta conficiant determinatum numerum.

Sit iniunctum diuidere 120, in quatuor partes in continua ratione, vt singula simul iuncta efficiant 7380. Supponendum est cubum ex secundo, & tertio, sumptis, diuisum per triplum eiusdem secundæ, & tertiæ additis primo, & quarto. Quotiens æquatur producto ex prima in quartam, & ex secunda in tertiam. *Hypothesis. Positio.*

Vt sint 2, 4, 8, 16, continuè proportionales, aggregatum ex secundo, & tertio est 12, huius cubus est 1728, quo diuiso per 36, triplum aggregati ex secundo, & tertio plus 2, & 16, primo nimirum, & quarto, nempe per 54, fit quotiens 32, quantum facit primus ductus in quartum, vel secundus in tertium. Hoc alibi demonstrauimus. Dico secundam, & tertiam simul vnitas esse 1 R, quarta, & prima simul erunt 120 — 1 R, cubus ex 1 R, est 1 C, & triplum, 1 R, est 3 R, huic addatur 120 — 1 R, & fit 120 + 2 R, per hoc autem diuidatur 1 C, & fit $\frac{1C}{120+2R}$ hoc autem æquatur producto, ex prima in quartam, vel ex secunda in tertiam. Modo diuidatur 1 R, aggregatum ex secunda, & tertia in duas partes tales, vt vna in aliam ducta faciat $\frac{1C}{120+R}$. Sumatur dimidium numeri radicum, & est $\frac{1}{2}$ R, eius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q, ab hoc subtrahatur $\frac{1C}{120+2R}$ numero, quem facere debet, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — $\frac{1C}{120+2R}$. Facta subtractione huius $\frac{1C}{120+2R}$ ab $\frac{1}{4}$ Q, remanet $\frac{120Q+2C}{480+8R}$. Aduertendum autem dignitatem intelligi in *Vide Scholion Regularum supra cap. 16.*

nume-

numeratore. Si verò illa fractio $\frac{120Q+2C}{480+8R}$ reducatur ad minimos terminos, facta communi diuisione per 4, remanet $\frac{30Q\frac{1}{2}C}{120+2R}$ ex hoc autem residuo sumatur latus quadratum, & est ℞ $\frac{(30Q-\frac{1}{2}C)}{(120+2R)}$ hoc autem additur, & subtrahatur ipsi $\frac{1}{2}$R, & fit pro secunda parte $\frac{1}{2}$R — ℞ $\frac{(30Q-\frac{1}{2}C)}{(120+2R)}$. Tertia erit $\frac{1}{2}$R + ℞ $\frac{(30Q+\frac{1}{2}C)}{(120+2R)}$.

$$\frac{1C}{120+2R} \quad \frac{1}{4}Q$$

$$120Q+2C$$

$$\frac{4C}{120Q-2C}$$

$$\frac{120Q-2C}{480+8R}$$

Vide Scholium regularum supra cap. 16.

Ad indagandam primam, & quartam. Diuidatur 120 — 1R, in duas partes ea lege, vt inter se ductæ faciant $\frac{1C}{120+2R}$. Sumatur dimidium ipsius 120 — 1R, & est 60 — $\frac{1}{2}$R, huius quadratum est 3600 — 60R + $\frac{1}{4}$Q, hoc autem subtrahatur ex numero efficiendo $\frac{1C}{120+2R}$, & remanet 432000 — 90Q — $\frac{1}{2}$C.

$\frac{1C}{120+2R}$ subtrahatur ex $\frac{3600-60R+\frac{1}{4}Q}{1}$

7200R — 120Q + $\frac{1}{2}$C

432000 — 7200R + 30Q

432000 — 90Q + $\frac{1}{2}$C

subtrahatur 1C

remanet 432000 — 90Q — $\frac{1}{2}$C.

Itaque

Itaque remanebit $\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$

Ex hoc sumatur radix quadrata, & est ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$.

Hoc autem addatur, & subtrahatur ipsi $60 - \frac{1}{2}R$.

Prima erit $60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$.

Quarta erit $60 - \frac{1}{2}R +$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}R}{120 + 2R}\right)$.

Erit ob id numerus 120, diuisus in quatuor partes in continua proportione; quarum

Prima $60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$.

Secunda $\frac{1}{2}R -$ ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Tertia $\frac{1}{2}R +$ ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Quarta $60 - \frac{1}{2}R +$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$.

Horum summa est 120, siquidem +, & — auferuntur seu subtrahuntur, & remanet 0.

Reliquum est, vt videamus, num omnium quatuor partium quadrata simul iuncta efficiant 7380.

Prima est $60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$.

Huius quadratum est $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q + \frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Secunda est $\frac{1}{2}R -$ ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum est $\frac{1}{4}Q \; \frac{30Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Tertia est $\frac{1}{2}R +$ ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum est $\frac{1}{4}Q + \frac{30Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Quarta est $60 - \frac{1}{2}R +$ ℞ $\frac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q \; \frac{432000 - 96Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Horum summa est $7200 - 120R + 1Q + \frac{864000 - 120Q - 2C}{120 + 2R}$

Reducantur ad fractiones.

$$\begin{array}{r} 14400R - 240Q + 2C \\ 864000 - 14400R + 120Q \end{array}$$

Huic autem $864000 - 120Q + 2C$

Addatur $864000 - 120Q - 2C$ numerator.

$\frac{172800 - 240Q}{120 + 2R}$ Quadratorum summa.

Hæc autem suma æquatur proposito numero 7380, & æquatio stabit hoc modo.

$$\frac{1728000 - 240Q}{120 + 2R} = \frac{7380}{1}$$

Proinde erit æquatio facta multiplicatione per crucem.

$$\begin{array}{l} 1728000 - 240Q = 885600 + 14760R \text{ per Anti-} \\ 885600 \end{array}$$

---

thesin $240Q = 842400 - 14760R$.

Diui-

Diuisione instituta per 240 Q, fit
$1Q = 3510 - 61\frac{1}{2} R$, & per antithesin
fit $1Q + 61\frac{1}{2} R = 3510$.

$$\begin{array}{r} 30\frac{3}{4} \\ 30\frac{3}{4} \\ \hline 945\frac{9}{16} \\ 3510 \\ \hline 4455\frac{9}{16} \end{array}$$

Huius autem numeri $4455\frac{9}{16}$, radix est $66\frac{3}{4}$, ab hoc numero subtrahatur $30\frac{3}{4}$, dimidium numeri radicum, & remanet 36, 1 R pretium, itaq; aggregatum ex secunda, & tertia erit 36.

Quoniam autem aggregatum ex prima, & quarta ponebatur $120 - 1R$, si ex 120, subtrahatur 36, remanebit aggregatum ex prima, & quarta, nempe 84.

Ad distinguendas secũdam, & tertiam, sumatur 46656, cubus ex 36, summa ipsarum, sumaturq; 108, triplum ipsius 36, ipsi verò adiungatur 84, & fit 192, per quẽ diuidatur 46656, vt fiat quotiens 243. Itaq; secundum, & tertium assequamur facili negotio.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \\ 36 \\ \hline 7776 \\ 3888 \\ \hline 46656 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 46656 & 243 \\ \hline 192 & \end{array}$$

Per multiplicationem secundi in tertium debet fieri 243, esto secundus 1 R, tertius erit $36 - 1R$.

$$\begin{array}{r} 36 - 1R \\ 1R \\ \hline 36R - 1Q \end{array}$$

Erit igitur 36 R — 1 Q ═ 243, & per antithesin 1 Q ═ 36 R — 246.

18	324
18	243
324	81

Hoc autem numero 9, subtracto ex 18, dimidio numeri radicum remanet 9, pro secundo addito ad 18, fit 27, & est tertius numerus. 9

Primus, & quartus habetur supposita eorum summa 84.

Primus esto 1 R, quartus erit 84 — 1 R

1 R

84 R — 1 Q

Ob id 84 R — 1Q ═ 243, per antithesin 84 R — 1Q ═ 243.

Itaq; 3 est primus, & 81 est quartus; erunt igitur

42
42
1764 | 42
243 | 39
1521 | 3 remanet.
39

Primus	3, cuius Q est	9	
Secundus	9, cuius Q est	81	
Tertius	27, cuius Q est	729	
Quartus	81, cuius Q est	6561	
Summa	120	7380	
Summa partium	120	7380	Summa quadratorum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Datum numerum diuidere in duas partes, ea lege vt differentia quadratorum partium, habeat datam rationem ad rectangulum factum, seu comprehensum sub ipsis partibus.

Datus

Datus sit numerus 12, & proportio vt 4 ad 6. Pars maior esto 1 R, minor erit 12 — 1 R, quæ ducta in 1R, facit 12 R — 1 Q, & est rectangulum sub partibus comprehensum. Quadratum autem partis maioris est 1Q, minoris autem est 144 — 24 R + 1 Q. Rectangulum autem debet habere ad excessum quadratorum, quæ est 24 R — 144; rationem vt 4 ad 6, quamobrem excessus iste multiplicetur per 6, & fit 144 R — 864, & rectangulum multiplicetur per 4, & fit 48 R — 4 Q, & hæc erunt æquationis extrema. Proinde erit æquatio huiusmodi 144 R — 864 = 48 R — 4 Q, & per antithesin erit, & 4 Q = 864 — 96 R, omnibus autem applicatis ad 4, fiet 1 Q = 216 — 24 R. *Hypothesis.* *Positio.*

Aequatio huiusmodi 1 Q + 24 R = 216, cuius Radix quadrata est ℞ 360 — 12, quæ subtracta ex 12, remanet 24 — ℞ 360, pars minor, cum illa esset pars maior.

12
12

144
216

360
℞ 360 — 12

24 — ℞ 360
24 — ℞ 360

— ℞ 207360 + 360
576 — ℞ 207360

936 — ℞ 829440. Quadratorum ex minori.

℞ 360 — 12
24 — ℞ 360

— 360 + ℞ 51840
℞ 207360 — 288

℞ 466560 — 648 Rectangulum.

℞ 360 — 12
℞ 360 — 12

— ℞ 51840 + 144
360 — ℞ 51840
144

504 — ℞ 207360 Q ex maiori parte.
936 — ℞ 829440 Q ex minori.

Excessus. ℞ 207360 — 432

Vt 4, ad 6; Ita ℞ 207360 — 432. ad ℞ 466560 — 648.

36 6 | 16 4

℞ 7464960 — 2592 | ℞ 7464960 — 2592

207360
36

1244160
622080

7464960

466560
16

2799360
466560

7464960

207360
829440

8294400
82944
186624
41472
165888

171992678400

. . . . . .

414720

Quadratum partis maioris est
504 — ℞ 207360.
Quadratum partis minoris est
936 — ℞ 829440.

Ho-

Horum differentia est ℞ 207360 — 432. Rectangulũ sub partibus est ℞ 466560 — 648. Vt autem est 4, ad 6, ita est ℞ 207360 — 432, ad ℞ 466560 — 648.

414720	207360
2	829440
829440	1036800
	829440
	207360
	℞ 207360

PROBLEMA NONVM.

Reperire numerum, cuius quadratum multiplicatum, per 3. productaq; additis 80, ex summa vero radix cubica extracta seruetur; huic si addatur sextuplum numeri inueniendi, faciat 80.

Quæsitus numerus esto 1 R, huius quadratum est 1Q, quod ducatur in 3, & fit 3 Q, huic autem addatur, & fit 3 Q ✠ 80, ex hac autem summa extrahatur radix cubica, & est ℞ C (3 Q ✠ 80) huic addatur 6 R, sextuplum numeri reperiendi, & fiet ℞ C (3 Q † 80) † 6 R, hoc autem æquabitur 80, & per antithesin ℞ C (3 Q † 80) 80 6 — R, summantur extremorum quadrata, quæ sunt 3Q † 80, & 51200 — 115200 R † 8640 6216 C, & sunt inter se equalia.

Tota autẽ operatio in sequenti pagina conspicitur deuenitur enim ad hanc æquationem 512000 — 200 R ✠ 8640 Q — 216 C = 3 Q ✠ 80. Et per antithesin fit æquatio 511920 — 115200 R ✠ 8540 Q — 216 C = 3 Q, deinde 511920 — 115200 R — 21 C = 8637 Q. Deinde 216 C † 115200 C — 8637 Q = 511920, & peracta operatione, vt vides fit 1 C † 2488 3200 R — 8637 Q = 2 388413952 0. Oportet autem radicem extrahere ex hac præsenti æquatio-tione. Cæterum ad illam æquationem hoc modo peruentum est: cum enim per antithesin æquatio haberetur 216 C † 115200R − 863Q = ; primò sumatur 10077696, per quem multiplicetur 511920, & fit 5158974136320, numerus diuidendus, per 216, numerum cuborum, & fit quotiens 23884139520; & hic est numerus absolutus in æquatione.

1 R   1 R
1 R   6

1 Q   6 R
3

3 Q
8 0

3 Q † 8 0
℞ C (3 Q † 8 0)
6 R

℞ C (3 Q † 8 0) † 6 R

8 0 − 6 R
8 0 − 6 R

− 8 0 R † 3 6 Q
6 4 0 0 − 8 0 R

6 4 0 0 − 9 6 0 R † 3 6 Q
8 0 − 6 R

− 3 8 4 0 0 R † 5 7 6 0 Q − 2 1 6 C
5 1 2 0 0 0 − 7 6 8 0 0 R † 2 8 8 0 Q

5 1 2 0 0 0 − 1 1 5 2 0 0 R † 8 6 4 0 Q − 2 1 6 C = 3 Q † 8 0.
5 1 2 0 0

$$51200 - 115200R + 8640Q - 216C = 3Q + 80$$
$$80 \qquad\qquad 80$$

$$511920 - 115200R + 8640Q - 216C = 3Q$$
$$216C \qquad 216C$$

$$511920 - 115200R + 8640Q = 3Q + 216C$$
$$3\,3Q$$

$$511920 - 115200R + 8637Q = 216C$$
$$216C = 511920 - 115200R + 8637Q$$
$$216C + 115200R = 511920 + 8637Q$$
$$216C + 115200R - 8637Q = 511920$$
$$216 \qquad 216 \qquad 216 \qquad 216$$

$$46656Q$$
$$256$$

10077696C multiplicetur
per 511920 numerum Radicum

2388413952 0 Productum diuidendum per 216, & fit quotiens.

hic numerus 23884139520

multiplica 8637, Num. Q.
per hunc 216, Num. C.

1865592. Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 8637, idem numerus.

115200, numerus R.
46656Q. ex 216,

5374771200, Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 24883200.

Deinde ducatur 8637, numerus quadratorũ in 216 numerum cuborum, & fit productum 1865592, diuidatur hic numerus per 216, fit quotiens 8637, idem numerus; & est numerus quadratorum.

2 5 9 2

$$1C + 24883200R - 8637Q = 238841\ 39520$$

Deinde ducatur 115200, numerus radicum in 46656, quadratum ex 216, & fit 5374771200, quo diuiso, per 216, & prouenit 24883200, & est numerus radicum in æquatione: Est itaque æquatio $1C + 24883200R - 8637Q = 23884139520$. Huius autem æquationis radix extrahitur hoc modo. Facta signatione, per puncta subtus, vt vides, iuxta naturam radicis cubicæ; quæratur latus cubicum numeri 23, eritq; 2, cuius cubus est 8; scribatur sub 23; nempe sub puncto, & subtrahatur a 23, remanet 15, huic intelligantur associatæ 884, sequentes figuræ, vt fiat 15884, ducatur 8637, numerus quadratorum in 4, quadratum primę figuræ 2, & productū 34548, addatur ipsi 15884, & fit 50432; huic intelligantur associatæ 139, figurę sequentes, vt fiat 50432139; à quo subtrahatur 49766400; numerus productus ex multiplicatione numeri 24883200, in primam figuram, & remanet 665739. Ad indagandam

```
8
-----------
15884
34548
-----------
50432139
49766400
-----------
00665739
172740
-----------
1793973
 215925
-----------
200989895
124416000
-----------
 76573895
 60
-----------
 165
 150
-----------
  157
  125
-----------
   32389
 3886650
-----------
 39190395
   699597
-----------
 39889992
```

dam secundam figuram sumatur triplum quadrati primæ figuræ 2, & est 12, cui intelligatur associatum triplum eiusdem 2, & est 6, & fit 126, huic addatur 24883200, numerus Radicũ; ea tamen cautela; vt trium figurarum spatijs antecedat, vt fiat 25009200; Deinde multiplicetur 8637, numerus quadratorum, in 4, duplum 2, primæ figuræ, & fit 34548, huic addatur 8637, numerus quadratorum, ea lege vt numerus quadratorum antecedat numerum 34548; vnius figuræ spatio, vt fiat 354117, huic intelligantur additæ duæ cifræ, vt sit 35411700, & ab hoc subtrahatur 24883200, & remanet 10528500, & hic est numerus per quem oportet diuidere 66573952, vt fiat quotiens 5, & secunda figura.

```
3 9 8 8 9 9 9 2
2 2 3 9 4 8 8 0 0
-----------------
1 7 4 9 5 1 1 2 2
1 6 8 7 5
-----------------
    6 2 0 1
    6 0 7 5
-----------------
      1 2 6 1
        7 2 9
-----------------
        6 3 2 2 2 0
    8 9 4 7 9 3 2
-----------------
    9 0 0 1 1 5 4 0
            3 4 5 4 8
-----------------
    9 0 0 4 6 0 8 8
    4 9 7 6 6 4 0 0
-----------------
    4 0 2 7 9 6 8 8
    4 0 2 4 8 6
-----------------
    0 0 0 3 1 0 8
          3 1 0 8
-----------------
    0             0
                  8   Reliqua figura
                  8   Cubus vltimæ figuræ.
-----------------
                  0
```

Modo ducatur 8637; numerus quadratorum in 4 duplum primę figuræ 2, & fit 34548; hic ducatur in 5, secundam figuram, & fit 172740; qui addatur ad 665739; ita tamen vt 665739, duabus figuris dextrorsum præcedat, fit 179 39739, modo sumatur 8637; numerus quadratorum, ducatur in 25, quadratum secundæ figuræ, & fit 215925, numerus quoq; addendus numero 1793973, vt fiat 2009898, huic intelligantur associatæ duæ sequentes figuræ 95, vt fiat 200989895; modo ducatur 24883200, numerus radicum in 5, secundā figuram, & fit 124416000 subtrahatur à 200989895, & remanet 76573895; sumatur triplum quadratum primę figurę 2, nempe 12; ducatur in 5; fit 60, subtrahatur à 76, remanet 16, cui annectatur 5, vt fiat 165, sumatur 6, triplum ipsius 3, primæ figuræ ducatur in 25, quadratum 5, secundæ fit 150, subtrahatur à 165, remanet 15, cui annectatur sequens figura 7, vt fiat 157, à quo subducto 125, cubo ex 5, remanet 32; huic associatæ intelligantur sequentes figuræ 389, vt fiat 32389.

34548	
5	
172740	numerus addendus.
8637	
25	
43185	
17274	
215925	numerus addendus.

Modo paretur diuisor ad indagandam tertiam figuram non dissimili modo, atq; reperiatur ea 9, in hanc ducatur 431850, numerus factus per multiplicationem 8637, nume-

numeri quadratorum in 50, duplum ipsius 25, & fiat 388650, addatur ad 32389; sed ea lege vt vides, & fiet 3919039 5, ducaturq; 8637, in 81, quadratum ex

24883200	
9	
223948800	
2592	Radix.
2592	
5184	
23328	
12960	
5184	
6718464	Quadratum.
2592	
13436928	
60466176	
33592320	
13436928	
17414258688	Cubus.
64497254400	
81911513088	
58027373568	
23884139520	

9, vt fiat 699597, addatur, vt fiat 39889992 2, ducatur 24883200; numeris radicum in 9, tertiam figuram fit 223948800, quo subtracto ex 398899922, rema-

remanet 1 7 4 9 5 1 1 2 2; Sumatur 6 2 5, quadratum ex 2 5, & prima figura eius triplum, & 1 8 7 5, ducatur in 9, tertiam figuram, quæ respectu duarum simul sumptarum habet rationem vnius, & fit 1 6 8 7 5, hic numerus subtrahatur de 1 7 9 9 5, & remanebit 6 2 0, cui intelligatur associata sequens figura 1, vt fiat 6 2 0 1, à quo subtrahatur 6 0 7 5, numerus productus à triplo numeri 2 5, in 8 1, quadratum ex 9, & remanet 1 2 6, cui intelligatur annexa sequens figura 1, vt fiat 1 2 6 1; à quo subtrahere oportet 7 2 9, cubum ex 9, & remanebit 6 3 2, huic intelligantur annexæ sequentes figuræ 2 2 0, vt fiat 6 3 2 2 2 0.

Paretur diuisor ad indagandam quartam figuram, quæ reperiatur 2. Duplum numeri 2 5 9, est 5 1 8, ducatur in hunc numerum, numerus 8 6 3 7; nempe numerus quadratorum fit 4 4 7 3 9 6 6; hic ducatur in 2, postremam figuram fit 8 9 4 7 9 3 2; addatur ad 6 3 2 2 2 0; sed ad eum modum, vt vides fit 9 0 0 1 1 5 4 0; ducaturq; 8 6 3 7, in 4, quadratum huius postremæ figuræ fit 3 4 5 4 8, addatur, vt vides, fit 9 0 0 4 6 0 8 8, ab hoc subtrahatur 49766400; numerus productus à multiplicatione numeri 24883200; nempe numeri radicum in hanc postremam figuram, & remanebit 4 0 2 7 9 6 8 8. Deinde quadratum ex 2 5 9, est 6 7 0 8 1; huius triplum est 2 0 1 2 4 3, ducatur in 2, postremam figuram, fit 4 0 2 4 8 6, subtrahatur de 4 0 2 7 9 6, remanet 3 1 0, annexæ intelligatur sequens figura 8 8, vt fiat 3 1 0 8, à quo subtrahatur 3 1 0 8, numerus factus à multiplicatione numeri 2 5 9 per 3, & producti 7 7 7, per 4, quadratum ex 2, postrema figura 2. Deniq; subtrahatur 8, cubus huius postremæ figuræ à reliqua figura 8, & nihil remanet.

Numerus autem 2 5 9 2, satisfacit quæstioni; propterea quod diuiso ipso per 2 1 6, vt par est secundum analyseos præcepta, vt notauimus de Isomœria tractantes, fit quotiens 1 2, cuius quadratum est 1 4 4 quod si ducatur in 3, fit productum 5 1 2, cuius latus cubicum est 8; si verò, idem numerus 1 2, multiplicetur per 6; sic enim quæstio præcipit

pit fit 72, qui quidem numerus additus numero 8, iam seruato, fit numerus 80, prout Problema requirebat.

PROBLEMA DECIMVM.

QVatuor numeros reperire in continua ratione, vt primus sit 8, secundus sit cum quarto 39, seu conficiat secundus iunctus quarto 39, quaeruntur singuli.

Primus cum tertio esto 1 R, huius cubus est 1 C, à quo subtrahatur 8 Q, productum ex 8, primo numero ex quatuor quæsitis, in 1 Q, remanet 1 C — 8 Q. Hoc autem ita esse ostenditur, ex eo quia, si summa ex primo, & tertio, ex quatuor numeris proportionalibus, cubicè multiplicetur, & ex cubo hoc numero subtrahatur, ille numerus qui prouenit, multiplicata summa primi in tertium in se ipsam deinde multiplicata per primum numerum ex quatuor quæsitis numerus prouenieus æquabitur quadrato summæ ex secundo, & quarto; quadrato inquam ducto in primum numerum ex quatuor quæsitis. Vt exempli gratia supponamus quatuor istos numeros quæsitos esse 3, 6, 12, 24, erit 15, summa ex primo, & tertio, quæ si cubicè multiplicetur facit 3375, ab hoc autem numero si subtrahatur 675, numerus proueniens per multiplicationem 3, primi numeri in quadratum summæ ex primo, & tertio, nempè in 225, remanet 2700; hic autem numerus æquatur numero, qui prouenit ex multiplicatione 3, primi numeri in quadratum summæ ex secundo, & quarto numero. Itaq; dicamus summam ex primo, & tertio esse 1 R, huius cubus est 1 C, à quo si subtrahatur quadratum summæ ex primo, & tertio, nempe 1 Q, ductum in 8, primum numerum, & est 8 Q, remanet 1 C — 8 Q, & erit 1 C — 8 Q = 12168, nam 12168, est numerus qui prouenit ex multiplicatione quadrati ex 39, summæ ex secundo, & quarto; nempe ex multiplicatione 1521, in 8; his enim inuicem ductis fit 12168. Reliquum est, vt radix extrahatur. Idq; vt exequamur, fiat signatio per puncta in numero 12168, vt exigit

git cubica radix, deinde eruatur radix cubica ex 12, primo numero signato per punctum, eritq; 2, huius cubus est 8, quo subtracto ex 12, remanet 4; notetur, vt vides in paradigmate, & ei annectatur 1, figura sequens; modo sumatur 4, quadratum ex 2, prima figura, ducaturq; in 8, numerum quadratorum fit 32, quo addito ad 41, fit 73, huic intelligatur associatæ duæ sequentes figuræ 6, 8, & fiet 7368, duplicetur 2, latus cubicum numeri 12, seu prima figura, & fit 4; hic ducatur in 8, numerum quadratorum, & fit 32, hic ducatur in 6, secundam figuram. Hæc autem sic inuenitur. Sumatur triplum quadrati primæ figuræ 2, & est 12; per quem diuidere oportet 73, antequam ei intelligantur associatæ duę illæ figuræ 6, 8, & fit quotiens 6; modo si 32, vt dicebamus factus per multiplicationem 8, numeri quadratorum in 4, quadratum primæ figuræ ducatur in 6, fit 192, quo addito ad 736, fit 928, cui intelligatur annexa sequens figura 8, vt fiat 9288. Deinde ducatur 36, quadratum ex secunda figura 6, in 8, numerum quadratorum, & fit 288, quo addito ad 288, figuras existentes in numero 9288, fit 9576. Ab hoc autem primò oportet subtrahere triplum quadratum primæ figuræ, & est 12, quod ducendum in 6, secundam figuram, vt fiat 72, facta subtractione remanet 2376, ab hoc sub-

2 6

1 C — 8 Q = 12168

8

41
32

7368
192

9288
288

9576
72

2376
216

216
216

0 0

subtrahere opportet 108, triplum quadrati secundæ figuræ ductum in 2, primam figuram; nempe 216, factaq; subtractione remanet 216, à quo tandem subtrahatur 216, cubus numeri 6, secundæ figuræ; erit itaq; 26, numerus, & radix quæsita. Primus igitur numerus cum tertio faciunt 26, cum autem primus sit datus 8, tertius erit 18, at verò sunt in ratione continua numeri quæsiti, si igitur scimus primum, & tertium, scimus, summam ex secundo, & quarto, secundus, & quartus noti fient, ac proinde quęsiti numeri erunt 8, 12, 18, 27, &c.

PROBLEMA VNDECIMVM.

NVmerum reperire, cuius cubo, ducto in datum numerum, & à producto, subtracto eodem numero quæsito multiplicato etidem per datum aliquem numerum, remaneat determinatus numerus.

Sit iniunctum reperire numerum cuius cubo, ducto in 5, & à producto subtracto eodem numero multiplicato per 3, remaneat 87802. Quæsitus numerus esto 1 R, eius cubus est 1 C, qui ductus in 5, facit 5 C, à quo si subtrahatur 3 R, numerus productus à quæsito numero ducto in 3, remanet 5 C — 3 R, & hoc æquabitur 87802.

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad\quad\quad 3 \quad\quad\quad 0 \\
1C - 15R = 2\;1\;9\;5\;0\;5\;0 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\;1\;9\;5\;0\;5
\end{array}
$$

Instituatur Parabolismus, & erit $1\,C - \frac{3\,R}{5} = \frac{87802}{5}$, reducantur omnia ad integra Isomœriæ beneficio. Quoniam R, distat à C per 2, exponens quadrati, debet multiplicari 3, numerator $\frac{3}{5}$ R, per 25, quadratum ex 5, & fit 75, quo diuiso per 5, fit 15, & erit 1 C — 15 R, debet autem 87802, multiplicari per 125, cubum ex 5, quoniam N, distat à C, per 3, exponentem cubi, & prouenit 10975250;

quo diuiso per 5, prouenit 2 1 9 5 0 5 0; erit igitur æquatio 1 C — 1 5 R = 2 1 9 5 0 5 0. Huius autem Radix est 130, quia verò per Isomœriam instituta fuit multiplicato per 5, ideo 130, diuidatur per 5, & prouenit 26, erit igitur quæsitus numerus 26.

PROBLEMA DVODECIMVM.

PRopositum numerum in duas partes diuidere, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuisum per partium differentiam reddat datum numerum.

Sit iniunctum diuidere 20, in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuisum per partium differentiam reddat 5 $\frac{1}{3}$. Pars vna esto 1R; pars altera erit 20 — 1R, hæ partes inuicem multiplicatæ producunt 20R — 1Q. Istarum autem partium 1R, & 20 — 1R, differentia est 2R — 20, subtracto 20 — 1R, de 1R, remanet 2R — 20, per hanc differentiã si diuidatur illud productũ 20R — 1Q. Fit quotiens $\frac{20R - 1Q}{2R - 20} = 5\frac{1}{3}$, & $\frac{20R - 1Q}{2R - 20}$ æquatur $5\frac{1}{3}$, & peracta operatione per antithesin fit æquatio 3Q — 28R = 320, instituto parabolismo reducitur

$$\begin{array}{r} 20 - 1R \\ 1R \\ \hline 20R - 1Q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1R \\ 20 - 1R \\ \hline 2R - 20 \end{array}$$

$$\frac{20R - 1Q}{2R - 20} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{60R - 3Q}{6R - 60} = \frac{32R - 320}{6R - 60}$$

$$60R - 3Q = 32R - 320$$

$$60R = 32R - 320 + 3Q$$

$$60R + 320 = 32R + 3Q$$

$$\begin{array}{l} 32R \\ \hline 28R + 320 = 3Q \end{array}$$

$$3Q - 28R = 320$$

$$1Q - 9\tfrac{1}{3}R = 106\tfrac{2}{3}$$

ad

ad hanc $1Q - 9\frac{1}{3}R = 106\frac{2}{3}$. Huius autem æquationis radix est 16, namq; dimidium numeri radicum est $\frac{14}{3}$ huius quadratum est $\frac{196}{9}$ hoc addito ad $106\frac{2}{3}$ seu $\frac{320}{3}$ fit $\frac{3468}{27}$ hęc fractio reducta ad minores terminos, nempe instituta communi diuisione per 3. euadit $\frac{1156}{9}$. Huius radix quadrata est $\frac{34}{3}$ nempe $11\frac{1}{3}$, ad hanc autem si addatur $4\frac{2}{3}$, dimidium numeri radicum fit 16, radicis pretium, & pars vna; alia erit 20, minus 16, nempe 4, & satisfaciunt Problemati.

$$1Q - 9\tfrac{1}{3}R = 106\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{320}{3} \times \frac{196}{9}$$

$$\begin{array}{r} 2880 \\ 588 \\ \hline 3468 \end{array}$$

$$\frac{3468}{27} \text{ seu } \frac{1156}{9}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ \hline 34 \\ \hline 6 \end{array}$$

Quartum exemplorum genus.

AD hoc exemplorum genus ea pertinent Problemata, in quorum resolutione secundæ Radices occurrunt; hunc enim ordinem huius Capitis initio polliciti sumus.

PROBLEMA PRIMVM.

TRes numeros reperire, quorum primus, cum 68. duplus sit secundi, & tertij. Secundus cum 92. triplus sit primi, *mi, & tertij. Tertius autem cum 88; sit quadruplus primi, & secundi;*

Primus esto 1 R, & quoniam primus, cum 68, duplus est secundi, & tertij; proinde $\frac{1}{2}$ R + 34; erunt secundus, & tertius. Itaq; primus erit 1 R; secundus, & tertius erit $\frac{1}{2}$ R + 34; qui simul conficiunt 1$\frac{1}{2}$R + 34; erunt omnes tres igitur simul 1$\frac{1}{2}$R + 34. Secundus autem dicatur esse 1 A, quo subtracto à 1$\frac{1}{2}$R + 34, remanebit primus, & tertius, 1$\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A. Quoniam autem secundus cum 921 triplus est primi, & tertij; ob id 1 A + 93, debet esse triplus primi, & tertij, scilicet ipsius 1$\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A, ob id 1$\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A, ducatur in 3, & fiet 4$\frac{1}{2}$R + 102 — 3 A, & huic æquabitur 1 A + 92, si verò vtriq; parti addantur 3 A; erit æquatio 4$\frac{1}{2}$R + 102 = 4 A + 92. Vtrinq, ablatis 92; remanebit æquatio 4$\frac{1}{2}$R + 10 = 4 A. Quoniam igitur 4 A, æquantur 4$\frac{1}{2}$R + 10; proinde 1 A, æquabitur 1$\frac{1}{8}$R + 2$\frac{1}{2}$. Et hic erit numerus secundus, nimirum 1$\frac{1}{8}$R + 2$\frac{1}{2}$. Tertius autem ponatur 1 R, ergo primus, & secundus, erunt 1$\frac{1}{2}$ R + 34 — B; Quoniam autem tertius cum 88; debet esse quadruplus primi, & secundi, erit 1 B + 88, æqualis 6 R +

Primus	1 R
Secundus	1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$
Tertius	1 $\frac{1}{5}$ R + 9 $\frac{3}{5}$

3 $\frac{13}{40}$ R + 12 $\frac{1}{10}$

3 $\frac{13}{40}$ R + 12 $\frac{1}{10}$ = 1 $\frac{1}{2}$ R + 34

12 $\frac{1}{10}$

3 $\frac{13}{40}$ R = 1 R + 21 $\frac{9}{10}$

1 $\frac{33}{40}$ R = 21 $\frac{9}{10}$

136 — 4 B, est enim 6 R + 136 — B 4, quadruplus primi, & secundi, qui fuerunt 1$\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 B, si vtriq, parti addantur 4 B, fiet æquatio 5 B + 88 = 6 R + 136,

vtrinq;

vtrinq; autem ablatis 88, fit 5 B = 6R + 48, & fiet 1 B = 1 $\frac{1}{5}$ R + 9 $\frac{3}{5}$, qui quidem erit numerus tertius. Cum itaq; numerus primus, positus sit 1R; secundus 1 $\frac{1}{7}$ R + 2 $\frac{2}{7}$. Tertius 1 $\frac{1}{5}$ R + 9 $\frac{3}{5}$, omnes simul erunt quidem 3 $\frac{13}{30}$ R + 12 $\frac{1}{10}$, & erit æquatio huiusmodi nimirum 3 $\frac{13}{30}$ R + 12 $\frac{1}{10}$ = 1 $\frac{1}{2}$ R + 34, quando-quidem tres omnes erant 1 $\frac{1}{2}$ R + 34. Vtrinq; verò si auferantur 12 $\frac{1}{10}$, remanebit æquatio 3 $\frac{13}{30}$ R = 1 $\frac{1}{2}$ R + 21 $\frac{9}{10}$, & vtrinq; si auferatur 1 $\frac{1}{2}$ R, fiet æquatio 1 $\frac{23}{30}$ R = 21 $\frac{9}{10}$. Diuisione autem instituta, fit 1 R, valor 12; quapropter numerus, qui erat 1 $\frac{1}{7}$ R + 2 $\frac{2}{7}$, erit 16; tertius autem positus 1 $\frac{1}{5}$ R + 9 $\frac{3}{5}$ erit 24; Problemati satisfaciunt.

PROBLEMA SECVNDVM.

DVos numeros reperire, ita vt si primus sumpserit $\frac{1}{3}$, à secundo, fiant 220; Secundus si acceperit $\frac{1}{4}$, à primo, fiant 220.

Dico primum esse 1 R, secundum verò 1 A; si autem secundus dederit primo $\frac{1}{3}$ A; primus erit 1 R + $\frac{1}{3}$ A, debebat autem esse 220; proinde 1 R + $\frac{1}{3}$ A; æquabitur 220; reductione peracta secendum artem; erit æquatio huiusmodi $\frac{1}{3}$ A = 220 — 1 R; qua propter 1 A; valebit 660 — 3 R; Secundus qui ponebatur 1 A, erit 660 — 3 R; cui si primus dederit $\frac{1}{4}$ R, secundus erit 660 — 2 $\frac{3}{4}$ R, sed esse debebat 220; erit igitur æquatio 660 — 2 $\frac{3}{4}$ R = 220; & facta reductione erit 440 = 2 $\frac{3}{4}$ R; diuisione instituta, fit 1 R, pretium 160. Secundus, qui ponebatur 660 — 3 R, erit 180; & satisfaciunt Problemati, propterea; quod si primus accipit $\frac{1}{3}$ à secundo accipit 60; qui quidem numerus additus ad 160, facit 220; at verò secundus 180; accipiens quartam partem à primo, accipit 40; quibus additis ad 180, fit itidem 220. &c.

SCHOLION.

Praecedentia duo Problemata resoluimus per secundas radices. Ignorandum tamen non est, ipsis posse satisfieri per primam radicem.

Ad primum quod attinet potuissemus dicere. Primus esto 1 R; ergo secundus, & tertius $\frac{1}{2}$ R + 3 2, quoniam primus cum 68, erat duplus secundi, & tertij; ob id secundus, & tertius, erunt $\frac{1}{2}$ R + 3 4; his autem si addatur 1 R, nempe primus, fient tres numeri 1 $\frac{1}{2}$ R + 3 4, quibus additis 9 2; fiet 1 $\frac{1}{2}$ R + 1 2 6, quibus diuisis per 4; fit quotiens $\frac{3}{8}$ R + 3 1 $\frac{1}{2}$, ducatur in 3; vt habeantur tres quartae partes; & fiet 1 $\frac{1}{8}$ R + 9 4 $\frac{1}{2}$, detractis autem 9 2; remanebit 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, & est s cundus. Vt habeatur tertius. Primus erat 1 R, s cundus est 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, ergo simul erunt 2 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$. Vt habeatur igitur tertius; subtrahatur 2 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$ ab 1 $\frac{1}{2}$ R + 3 4, summa trium; remanebit 3 1 $\frac{1}{2}$ − $\frac{5}{8}$ R, eritq; tertius numerus. Quamobrem tres numeri quaesiti sunt 1 R; 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, & 3 1 $\frac{1}{2}$ − $\frac{5}{8}$ R, huic tertio si addantur 8 8; debet fieri quadruplus numerus primi, & secundi; Ideo multiplicetur primus, & secundus per 4; nempe 2 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, ducatur in 4; fit 8 $\frac{1}{2}$ R + 1 0; & aequabitur 1 1 9 $\frac{1}{2}$ − $\frac{5}{8}$ R, scilicet tertio numero, plus 8 8, & ordinata aequatione, institutaq; diuisione fiet 1 R, valor, 1 2.

Aduertendum autem, quod summa illa trium numerorum, puta 1 $\frac{1}{2}$ R + 3 4, debet diuidi in duas tales partes, vt si vni ipsarum addantur 92. ipsa tripla fiat alterius; quod assequemur addendo 9 2, ad 3 4; vt fiat 1 $\frac{1}{2}$ R + 1 2 6: his diuisis per 4; fiet quotiens $\frac{3}{8}$ R + 3 1 $\frac{1}{2}$ numerus qui si ducatur in 3; fiet 1 $\frac{1}{8}$ R + 9 4 $\frac{1}{2}$, & hic erit triplus alterius partis; si detrahantur autem 9 2; remanet 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, pro secundo ex tribus; est enim pars vna illius numeri; pars in quam maior $\frac{3}{8}$ R + 3 1 $\frac{1}{2}$, altera erit 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, haec tripla illius, si addideris 9 2; remanet enim 1 $\frac{1}{8}$ R + 2 $\frac{1}{2}$, cui si addas 9 2; fit numerus triplus illius; itaq; satisfaciunt; ordinata autem aequatione, & diuisione instituta, fit 1 R, valor 1 2.

Sic etiam secundum resolui potest sine secundarum radicum auxilio.

PROBLEMA TERTIVM.

T*Res numeros reperire, vt primus accipiens $\frac{1}{3}$ à secundo faciat 100; Secundus accipiens $\frac{1}{4}$ à tertio faciat 100; Tertius deniq; accipiens $\frac{1}{5}$ à primo faciat itidem 100, Quaeruntur singuli.*

Dico primum esse 1 R, secundum verò 1 A; tertium 1 B, primus autem, quia habens $\frac{1}{3}$ secundi, haberet 100; ideo accipiat $\frac{1}{3}$ à secundo, vt habeat 1 R + $\frac{1}{3}$ B = 100, & per antithesin fiet $\frac{1}{3}$ A = 100 — 1 R; vt autem cognoscamus valorem 1 A; omnia ducantur in 3; fiet enim 1 A = 300 — 3 R; quamobrem secundus qui ponebatur 1 A, esset 300 — 3 R, itaq; primus erit 1 R; secundus 300 — 3 R; at verò secundus qui ponebatur 300 — 3 R, cum $\frac{1}{4}$ tertij dicebatur aequalis 100; proinde secundus 300 — 3 R + $\frac{1}{4}$ B, aequabitur 100; erit igitur aequatio 300 — 3 R + $\frac{1}{4}$ B = 100. Vtrinq; additis 3 R; fiet aequatio 300 + $\frac{1}{4}$ B = 100 + 3 R, sublatis vtrinq; 100; remanebit 200 + $\frac{1}{4}$ B = 3 R; & rursus per antithesin fiet $\frac{1}{4}$ B = 3 R — 200, omnibus ductis in 4, fit 1 B = 12 R — 800. Itaq; tertius, qui ponebatur 1 B, erit 12 R — 800; Primus ergo erit 1 R, Secundus 300 — 3 R, Tertius 12 R — 800; hic autem si haberet $\frac{1}{5}$ R, nempe $\frac{1}{5}$ primi esset 100; proinde $\frac{61}{5}$ R — 800, aequabitur 100; Vtrinq; additis 800, fiet $\frac{61}{5}$ R = 900; ac proinde 61 R = 4500; diuisione instituta, fit 1 R, pretium 73 $\frac{47}{61}$. Si igitur 1 R, pretium est 73 $\frac{47}{61}$; reperiemus singulos; vti perspicuum est; quamobrem ex tribus numeris ille; qui ponebatur 1 R, erit 73 $\frac{47}{61}$, qui verò ponebatur 300 — 3 R, erit 78 $\frac{42}{61}$. Tertius qui ponebatur 12 R — 800, erit 85 $\frac{11}{61}$. Hi porrò numeri Problemati satisfaciunt; nam tertia pars numeri 78 $\frac{42}{61}$ est 26 $\frac{14}{61}$ quae addita numero 73 $\frac{47}{61}$ facit 100, & ita de alijs. &c.

PRO-

PROBLEMA QVARTVM.

Tres numeros reperire Arithmeticè proportionales; ita vt primo ducto in 1, secundo in 2, tertio in 3; fiant 36; ipsorum autem quadrata simul addita faciant 93.

Tres numeri quæsiti sint 1 R, 1 A, 1 B. Quoniam autem sunt arithmeticè proportionales, extremorum 1 R; 1 B, summa 1 R ✠ 1 B, dupla erit medij 1 A, quamobrem 1 R ✠ 1 B, æquabitur A; diuisa verò vtraq; æquationis parte per 2; fit 1 A $= \frac{1R \dagger 1B}{2}$. Numerus ergo positus 1 A; erit $\frac{1R \dagger 1B}{2}$. At verò si primus ducatur in 1; secundus in 2, tertius in 3, fiunt 36; proinde ducatur 1 R, in 1, fit 1 R; insuper ducatur $\frac{1R \dagger 1B}{2}$ in 2, & fit 1 R ✠ 1 B. Demum ducatur 1 B, in 3; fiunt 3 B; istorum autem productorum summa est 2 R ✠ 4 B, quæ æqualis est 36; detractis autem 2 R, vtrinq; remanebit 4 B $=$ 36 — 2 R; diuisa verò vtraq; parte æquationis per 4; fit 1 B $= \frac{18 - 1R}{2}$ cum autem secundum numerum superius inueniremus æqualem $\frac{1R \dagger 1B}{2}$, ob id ipse secũdus erit $\frac{18 \dagger 1R}{4}$.

Quaproter tres numeri erunt.

1 R. Primus.

$\frac{18 \dagger 1R}{4}$ Secundus.

$\frac{18 - 1R}{2}$ Tertius.

Horum autem quadrata sunt.

1 Q. Quadratum primi.

$\frac{324 \dagger 36R \dagger 1Q}{16}$ Quadratum secundi.

324

$\frac{324 - 36R + 1Q}{4}$ Quadratum tertij.

Horum summa est $\frac{1620 - 108R + 21Q}{16}$ quæ æquabitur 93, omnibus ductis in 16, erit æquatio 1620 — 108 R + 21Q = 1488, & per antithesin 1620 + 21Q = 1488 + 108R; & rursus fiet 132 + 21Q = 108R, atq; adeo 108R — 21Q = 132, omnibus autem diuisis per 21; fit $\frac{108R}{21}$ — 1Q = $\frac{132}{21}$ quadratum dimidij numeri radicum est $\frac{2916}{441}$ à quo si dematur $\frac{132}{21}$ seu $\frac{2772}{441}$ remanet $\frac{144}{441}$ huius radix quadrata $\frac{12}{21}$ subtracta a $\frac{54}{21}$ dimidio numeri radicũ relinquit $\frac{42}{21}$ hoc est 2; quamobrem numemerus positus 1 R, erit 2; positus $\frac{18 + 1R}{4}$ erit 5; positus $\frac{18 - 1R}{2}$ erit 8; & satisfaciunt Problemati.

PROBLEMA QVINTVM.

Tres numeros reperire, ita vt quadratum primi additum plano sub primo in secundum efficiat 12, idem autem quadratum subtractum ex plano sub primo in tertium, relinquat 8; insuper quadratum primi, plus quadrato tertij ad quadratum secundi, rationem habeat vt 5. ad 2.

Primum numerum dico esse 1 R, secundum 1 A; tertium 1 B: primi quadratum est 1 Q; planum sub primo in secundum est, 1 R A; quamobrem 1 Q + 1 R A, æquabitur 12; vtrinq; auferatur 1 Q; remanebit 1 R A = 12 — 1 Q; diuisa verò vtraq; æquationis parte per 1 R; fit 1 A = $\frac{12 - 1Q}{1R}$. Sic etiam planum sub primo in tertium erit 1 R B; quamobrem 1 R B — 1 Q, æquabitur 8, vtrinq;

 addi-

addito 1 Q, fit $1RB = 8 + 1Q$, vtraq; parte æquationis diuisa per 1 R, fit $1B = \frac{8+1Q}{1R}$.

Primus igitur erit 1 R

Secundus autem $\frac{12-1Q}{1R}$

Tertius demum $\frac{8+1Q}{1R}$ Horum autem quadrata sunt hæc 1 Q; $\frac{144-24Q+1QQ}{1Q}$ & $\frac{64+16Q+1QQ}{1Q}$. Ipsorum autem extremorũ quadrata simul addita faciunt $\frac{64+16Q+2QQ}{1Q}$.

Vt verò 5, ad 2; ita debet esse $\frac{64+16Q+2QQ}{1Q}$ ad $\frac{144-24Q+1QQ}{1Q}$, & ita $\frac{128+32Q+4QQ}{1Q}$ æquabitur $\frac{720-120Q+5QQ}{1Q}$

seu $128 + 32Q + 4QQ = 720 - 120Q + 5QQ$

$$\begin{array}{c} 120Q \\ \hline 128 + 152Q + 4QQ = 720 + 5QQ \\ 128 \\ \hline 152Q + 4QQ = 592 + 5QQ \\ 4QQ \\ \hline 152Q = 592 + 1QQ \end{array}$$

$$152Q - 1QQ = 592$$

Huius autem æquationis radix quadrato-quadrata est 2.

Numerus igitur positus 1 R erit 2; positus $\frac{12-1Q}{1R}$ erit 4; positus demum $\frac{8+1Q}{1R}$, erit 6, & satisfaciunt Ploblemati.

PRO-

PROBLEMA SEXTVM.

Dvos numeros reperire, vt si vnus per alium diuidatur fiat quotiens $2\frac{1}{3}$.

Dico primum esse 1 R, secundum autem 1 A; & quia ambo debent facere 100; proinde 1 R + 1 A; æquabitur 100; vtrinq; verò sublata 1 R, fiet 1 A = 100 — 1 R. Itaq; primus est 1 R; Secundus 100 — 1 R horum summa est 100; diuidatur autem numerus secundus puta 100 — 1 R per 1 R, numerum primum, & fit $\frac{100 - 1R}{1R}$ hic autem quotiens æquabitur $2\frac{1}{3}$ siue $\frac{7}{3}$ reuocetur æquatio ad integra, decussatim facta multiplicatione; fiet æquatio 300 — 3 R = 7 R, Vtrinquè additis 3 R, fit æquatio 10 R = 300; diuisione instituta, fit 1 R pretium 30; proinde qui supponebatur 1 R, erit 30; qui verò 100 — 1 R, erit 70; diuisis autem 70, per 30; fit quotiens $2\frac{1}{3}$ vti perspicuum est.

SCHOLION.

Perspicuum est etiam sine secundis radicibus posse hoc Problema resolui.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Dvos numeros reperire, quorum quadrata simul addita faciant 100; ipsi verò numeri inter se ducti faciant $\frac{3}{4}$ *quadrati maioris, quæruntur ipsi numeri.*

Maior numerus sit 1 R, minor erit 1 A; quadrata sunt 1 Q & 1 A Q horum summa est 1 Q + 1 A Q; sed esse debet 100; ob id 1 Q + 1 A Q = 100; vtrinq; auferatur 1 A Q; erit igitur 1 Q = 100 — 1 A Q; & ita etiam 1 A Q = 100 — 1 Q; illi autem numeri 1 R, & 1 A; ducti inter se, faciunt 1 R A; & hoc æquabitur $\frac{3}{4}$ maioris quadrati nimirum 1 Q; Quoniam autem 1 R A; æquatur $\frac{3}{4}$ Q, ergo 1 Q A Q, æquabitur $\frac{9}{16}$ Q Q, reducta æquatione ad integra; fiet 16 Q A Q = 9 Q Q, & per depressionem siue hypobibasmum, fiet æquatio 16 A Q = 9 Q

Si igitur 9 Q, valent 16 A Q; certè 1 Q, valebit $\frac{16 AQ}{9}$

9 16AQ 1? $\frac{16AQ}{9}$

At verò 1 A Q, æquabatur numero 100 — 1 Q, proinde 1 A Q æquabitur 100 — $\frac{16 AQ}{9}$; etenim 1 Q, reperiebatur æquale $\frac{16 AQ}{9}$ potest igitur eius loco substitui. Additis autem $\frac{16 AQ}{9}$ ex vtraq; parte; fiet 1 A Q + $\frac{16 AQ}{9}$ = 100; est autem 1 A Q + $\frac{16 AQ}{9}$ idem quod $\frac{25}{9}$ A Q quamobrem $\frac{25}{9}$ A Q, æquabitur 100; ac proinde 25 A Q = 900; seu $\frac{5}{3}$ A æquabitur 10; quamobrem 1 A, pretium erit 6, cuius quadratum est 36; quo subtracto ex 100, remanebit 64; pro pretio ipsius 100 — A Q & satisfaciunt problemati.

Quintum exemplorum genus.

AD hoc genus exemplorum, ea pertinere dicebamus Problemata, quæ rebus Geometricis sunt applicata.

PRO-

PROBLEMA PRIMVM.

Est rectangulum quoddam, cuius latera sunt in proportione data; & data quoq; est proportio, quam habet summa quadratorum ex iisdem lateribus, ad summam eorundem laterum. Oportet reperire rectangulum.

Data sit laterum proportio vt 4, ad 1; sitq; proportio summę quadratorum ad summam laterum, vt 34, ad 5, oportet reperire rectangulum. Latus vnum esto 1R; aliud erit 4R, horum quadrata sunt 1Q; 16Q, quorum summa est 17Q, Sed hæc summa debet esse ad 5R, summam laterum, vt 34, ad 5, ob id erunt proportionales 17Q, 5R, 34, 5, quamobrem fiet æquatio 85Q ⊏ 170R; & per hypobibasmum 85R ⊏ 170, diuisione instituta fit 1R, valor 2; & est latus minus; erit autem maius; 8, vt patet &c.

PROBLEMA SECVNDVM.

Est rectangulum, cuius latus maius est duplum minoris minus quatuor unitatibus; area verò est 96; quæruntur latera.

Latus minus esto 1R; maius igitur erit 2R—4, rectangulum sub his est 2Q—4R, & æquatio erit 2Q—4R ⊏ 96, instituto parabolismo, fiet æquatio 1Q—2R ⊏ 48; huius autem æquationis radix est 8; vt patet; quamobrem latus minus est 8; maius autem est 16, minus 4; nempe 12.

PROBLEMA TERTIVM.

Est rectangulum, cuius area est 48, diameter autem est 10.

Lateris vnius quadratum esto 1R; & quoniam laterum quadrata æqualia sunt quadrato diametri; si nimirum si-

mul

simul accipiantur; proinde latus alterum erit, cuius quadratum est 1 0 0 — 1 R, ergo latera ipsa erunt 1 R, & R (1 0 0 — 1 R) quæ quidem latera si inuicem multiplicentur producunt 1 0 0 R — 1 Q, & erit æquatio huiusmodi 1 0 0 R — 1 Q = 2 3 0 4; nimirum 1 0 0 R — 1 Q, productum quadratorum æquale erit quadrato aeris; huius autem æquationis radix est duplex eo quòd æquatio sit amphibola; atq; adeo 6 4, erit maior; minor autem erit 3 6, si verò hæc sunt laterum quadrata; latera ipsa erunt 8; 6, & satisfaciunt Problemati.

Cæterum quadrata laterum ad inuicem multiplicata, producere quadratum areæ facile demonstrabitur.

Si namq; duo numeri inter se multiplicentur, producunt numerum medio loco proportionalem inter ipsorum quadrata.

Sint duo numeri A, & B; ex A in B, fiat C; ex A in se fiat quadratum D; ex B, in se quadratum E. Dico C, medium esse proportionalem inter D, & E hoc est E, C, D, esse continuè proportionales in proportione B, ad A;

A 3		B 4
D 9	C 12	E 16

Quoniam enim A, multiplicans A, & B, facit C, & D, ergo vt B, ad A; ita erit C, ad D, & quia B. multiplicans B, & A; produxit E, & C, erit, vt B, ad A, ita E, ad C, sunt igitur E, C, D, in continua ratione, vt B, ad A, Hoc eodem modo demonstratur à Clauio.

Alia positio Posset etiam alijs modis institui positio. Dicamus latus vnum esse 1 R, eius quadratum est 1 Q, aliud autem latus erit 1 0 0 — 1 Q. Hæc autem si multiplicentur inter se fit productum 100 Q — 1 QQ, quod æquale est numero 2304, scilicet quadrato ex area eiusdem rectanguli, & fient latera, vt supra 6, & 8.

100 — 1 QQ = 2 3 0 4

			2 5 0 0
5 0		5 0	2 3 0 4
1 4		1 4	2 9 6
3 6		6 4	· ·
·		·	1 4
6		8	

PRO-

PROBLEMA QUARTUM.

Est rectangulum cuius area est 60, & laterum aggregatum est 17, quaeruntur latera.

Latus vnum esto 1 R, aliud erit 17 — 1 R, hæc autem inter se ducta, faciunt 17 R — 1 Q, & erit æquatio 17 R — 1 Q = 60, huius autem æquationis duplex est radix, scilicet 5, & 12.

PROBLEMA QUINTUM.

Est rectangulum cuius latus vnum est 9. productum autem ex altero latere in diametrum est 180. Quaritur latus alterum, diameter, ac area.

Latus ignotum esto 1 R, latus notum est 9, proinde laterum quadrata erunt 1 Q, & 81, at verò hæc quadrata simul iuncta sunt æqualia quadrato diametri, sed diametri est $\frac{180}{1R}$ nam productum ex altero latere scilicet 1 R, in diametrum est 180: si $\frac{180}{1R}$ ducatur in 1 R; fit 180; quamobrem erit æquatio 1 Q + 81 = $\frac{32400}{1Q}$; est nimirum 1 Q + 81; æquale quadrato diametri, & per multiplicationem in crucem fit æquatio huiusmodi 1 QQ + 81 Q = 32400. Huius autem æquationis radix quadrato-quadrata est 12.

PROBLEMA SEXTUM.

Est rectangulum cuius area, cum diametro facit 58, & laterum differentia est 2; Quaruntur latera, diameter, & area.

Latus minus esto 1 R — 1 (est enim 1, dimidium differentiæ) maius latus autem erit 1 R + 1, hac enim ratione

tione differunt dato interuallo 2; rectangulum sub his est 1 Q — 1; & est area, quam si dempseris à 58; conflato ex area, & diametro ipsius rectanguli, habebis 59 — 1 Q; pro diametro ipsò cuius quadratum est 3481 — 118 Q ✠ 1 QQ; At verò quadrata laterum simul sunt 2 Q ✠ 2; erit igitur æquatio huiusmodi 3481 — 118 Q ✠ 1 QQ ⊏ 2 Q ✠ 2; & per antithesin 3481 ✠ 1 QQ ⊏ 120 Q ✠ 2, & rursus 3479 ✠ 1 QQ ⊏ 120 Q, & rursus 120 Q — 1 QQ ⊏ 3479. Huius autem radix est quidem 7; atq; adeo latus, quod ponebatur 1 R — 1, erit 6; quod autem positum fuit 1 R ✠ 1, erit 8.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Est quadratum cuius diameter cum latere facit 4, quaeruntur latera.

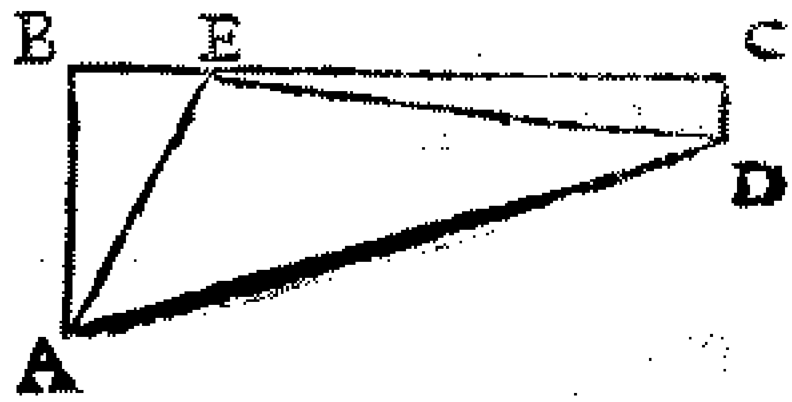
Latus illud esto 1 R; ergo diameter erit 4 — 1 R, huius quadratum est 16 — 8 R ✠ 1 Q, his æqualia erunt 2 Q; Itaq; 2 Q ⊏ 16 — 8 R ✠ 1 Q, per antithesin autem 1 Q ✠ 8 R ⊏ 16. Semissis numeri radicum est 4; ad cuius quadratum 16; additto 16, numero absoluto fiet 32; cuius radix quadrata est ℞ 32, à qua si subtrahatur 4; dimidium numeri radicum remanebit ℞ 32 — 4, pro latere quæsiti quadrati; diameter autem erit 8 — ℞ 32.

PROBLEMA OCTAVVM.

Est figura A B C D, in qua scimus A B, esse 8, & B C, 20, item C D; 2, scimus etiam productum ex A B, in B E, æquale esse producto ex E C, in C D, sunt autem anguli ABC, BCD, recti quaeritur B E, & E C; insuper A E, & E D.

Hoc nil aliud est, quam diuidere B C, in duas partes, vt productum sub vna, & A B, æquale sit producto sub alia, & C D. Pars vna pu a B E, sit 1 R, alia E C, erit 20 — 1 R; si ducatur 1 R, in 8, puta A B, fiunt 8 R, si verò multi-

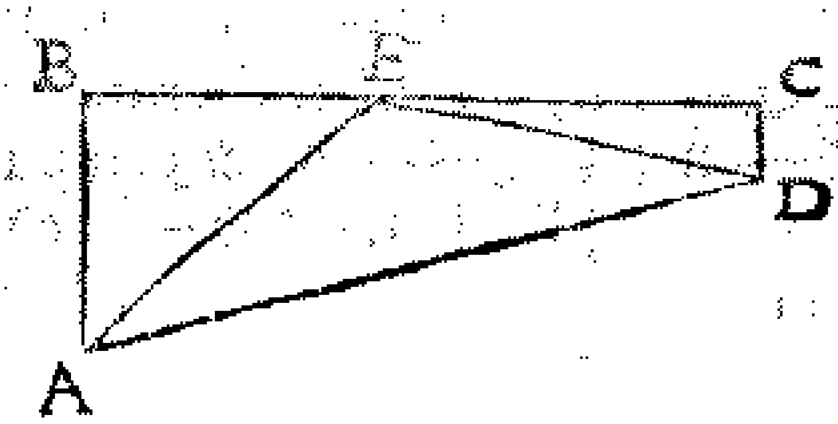
multiplicetur 20 — 1 R, per 2, puta CD, fiet 40 — 2 R; erit igitur æquatio 8 R = 40 — 2 R, & per antithesin fiet 10 R = 40, quam obrem BE, erit 4, vt EC, erit 16, inotescent autem AE, ℞ 80, & ED, ℞ 260, per 47, primi.



PROBLEMA NONVM.

Est figura ABCD, in qua nota est AB, 8, BC, 20, item CD 2, notum est etiam AE, æqualem esse ipsi ED; quæro quanta sit BE, quãta EC, quanta AE; demum quanta ED, suppositis angulis ABC, BCD, rectis. Oportet autem quadratum ex BC, plus altero è duobus quadratis, maius esse reliquo.

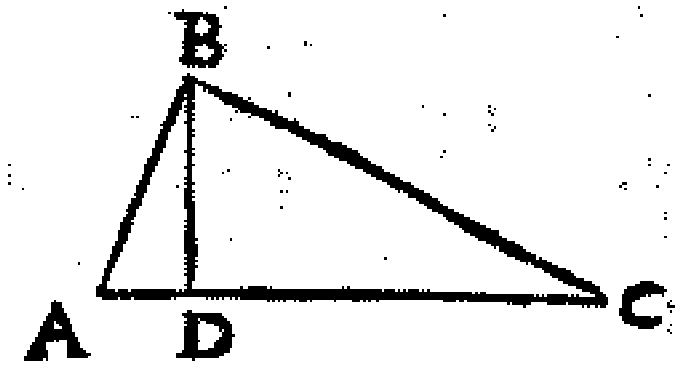
Dico BE, esse 1 R, reliqua EC, erit 20 — 1 R, quadratum ex 1 R, est 1 Q, quo addito ad 64, quadratum ex AB, 8, fit 1 Q + 64, Deinde quadratum ex EC, est 400 — 40 R + 1 Q, quo addito ad 4, quadratum ex CD, 2, Fit 404 — 40 R + 1 Q, hæc igitur æqualia debent esse inter se; nimirũ 1 Q + 64, & 400 — 40 R 1 + 1 Q, radices enim ipsorum supponuntur æquales nimirum ℞ (1 Q + 64) & ℞ (400 — 40 R + 1 Q) quæ sunt AE, & ED; obseruatis autem præceptis artis, reperiemus 40 R = 340, quamobrem diuisione instituta inotescet 1 R, pretium; puta BE, nempe $8\frac{1}{2}$, reliqua EC, erit $11\frac{1}{2}$. &c.



PROBLEMA DECIMVM.

Est triangulum ABC rectangulum in quo scimus quadrata ex AC, AB, AD, simul iuncta conficere 84, & si 40, diui-

datur per singula, quotientibusq; multiplicatis, nimirum ducto primo in secundum, & producto ducto in tertium, proueniat 1000, quaeruntur latera.



Quoniam si sint tres numeri proportionales ducatur autem primus in secundum, productum ducatur in tertium, prouenit numerus, cuius latus cubicum est, numerus secundus ex tribus, ob id quia si primus ducatur in secundum, & productum in tertium fit 1000, ob id secundus erit 10, radix nimirum cubica numeri 1000, si igitur diuidatur 40, per 10, fit quotiens 4, pro secundo numero ex tribus quaesitis. Modo dicere oportet primum, & tertium ex quaesitis esse 1 R, & opus est diuidere 1 R, in duas partes, vt ex ductu vnius in aliam fiat 16, sumatur dimidium ipsius 1R, & est $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q, à quo subtrahatur 16; quadratum illius secundi numeri 4, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — 16, cuius radix quadrata puta ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) est subtrahenda à dimidio 1 R, vt habeatur $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) & erit pars prima, pars autem secunda erit $\frac{1}{2}$ R + ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16). Istorum autem quadratorum summa est 1 Q — 16, & aequabitur 84, & per antithesin 1 Q = 100, quamobrem 1 R, pretium erit 10. Itaq; pars posita $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) erit 2, & erit A D, quantitas autem posita $\frac{1}{2}$ R + ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) erit 8, nimirum A C, itaq; A D, erit 2, A B, erit 4, & A C, erit 8. &c.

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

EST triangulum rectangulum, in quo notum est segmentum minus basis 5 $\frac{4}{7}$, itemq; nota est differentia qua basis superat latus conterminũ, cum illo segmento nempe 6, oportet reperire quantitatem basis, &c.

Latus illud circa rectum, & conterminum cum segmento minori, sit 1 R, erit igitur basis 1 R + 6, quoniam autem

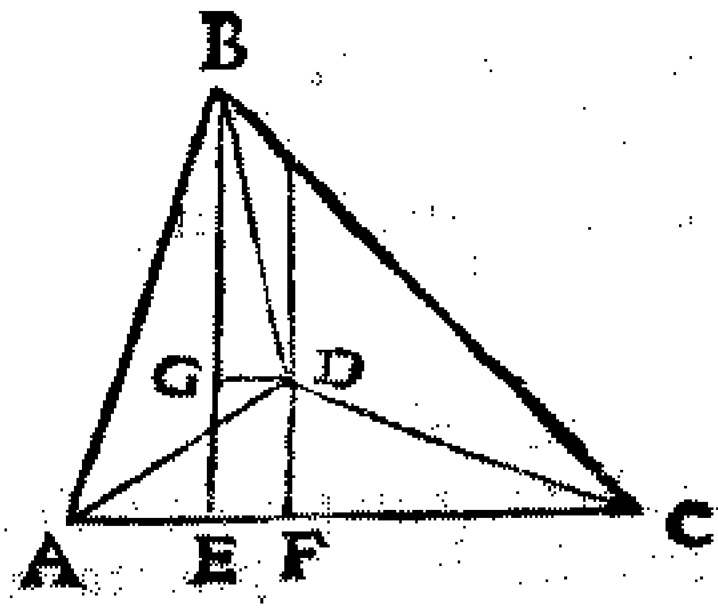
tem

tem segmentum minus est 5 $\frac{3}{7}$ ergo 5 $\frac{3}{7}$ R + 32, $\frac{1}{7}$ æquabitur 1 Q, atq; adeo 1 Q — 5 $\frac{3}{7}$ R, æquabitur 32 $\frac{1}{7}$ fit autem explicata æquatione 1 R, precium 9.

PROBLEMA DECIMVMSECVNDVM.

Est triangulum ABC, in quo nota sunt latera AC, 14, AB, 13; BC, 15, est autem punctum D, vel extra vel intra inuinctum sit cognoscere, quanta sit AD, quanta DB, quanta demum DC, Si ad quadratum ex AD, addatur 100, ad quadratum ex DB, addatur 36, ad quadratum ex DC, addatur 64, hac nimirum additione facta omnia sint inter se æqualia.

Primò diuidatur AC, 14, in duas partes, vt quadratum vnius plus 100, quadrato ex 10, æquale sit quadrato alterius plus 64, quadrato ex 8. Proinde pars vna esto 1 R, altera erit 14 — 1 R, quadratum illius est 1 Q, istius autem est 196 — 28 R + 1 Q. si ad 1 Q, addatur 100, quadratum ex 10,



fit 100 + 1 Q. si ad 196 — 28 R + 1 Q, addatur 64, quadratum ex 8, fit 260 — 28 R + 1 Q. erit igitur 100, + 1 Q = 260 — 28 R + 1 Q, & per antithesin fiet 100 + 1 Q + 28 R = 260 + 1 Q, & rursus vtrinq, sublatis 100, & 1 Q fiet 28 R = 160, diuisione instituta, fit 1 R, pretium 5 $\frac{5}{7}$, & est AF, cum autem AE, sit 5; erit igitur EF, $\frac{5}{7}$, remanebit autem FC, 8 $\frac{2}{7}$.

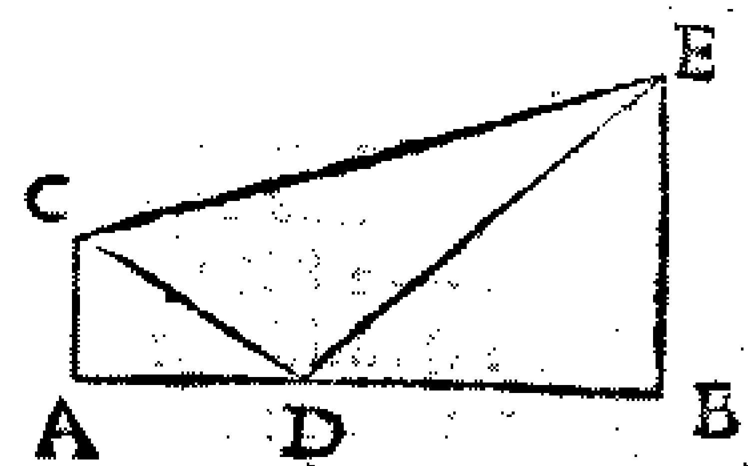
Sit autem FD, 1 R, eius quadratum est 1 Q, quo addito ad 68 $\frac{32}{49}$, quadratum ex 8 $\frac{2}{7}$ fit 68 $\frac{32}{49}$ + 1 Q ad quod addito 64, quadrato ex 8, fit 132 $\frac{32}{49}$ + 1 Q, & quia BE, erat 12; ductaq; cũ sit DG ad rectos angulos, ad BE, & DF, ad AC, atq; adeo EG, sit 1 R, erit GB, 12 — 1 R, cuius quadratum est 144 — 24 R + 1 Q, ad quod intelligatur addi

$\frac{25}{49}$, quadratum ex GD, fiet $144\frac{25}{49} - 24R + 1Q$, ad quod si intelligatur addi 36, quadratum ex 6, fiet $180\frac{25}{49} - 24R + 1Q$; & erit æquatio $132\frac{25}{49} + 1Q = 180\frac{25}{49} - 24R + 1Q$, & per antithesin fiet $132\frac{25}{49} + 24R + 1Q = 180\frac{25}{49} + 1Q$. & rursus $24R + 1Q = 47\frac{25}{49} + 1Q$, & deniq; $24R = 47\frac{25}{49}$, diuisione autem instituta, fit 1 R, valor $1\frac{1152}{1176}$. Neq; dissimili artificio procedendum erit; cum punctũ ceciderit extra triangulum &c.

PROBLEMA DECIMVM TERTIVM.

Est figura ABCE; in qua nota sunt, AB 26; AC 8; BE 15, anguli CAB, ABE, sunt recti oportet cognoscere quanta sit CD; & DE, cognita ratione ipsius CD, ad DE, nimirum vt 2, ad 5.

Problema istud indiget determinatione, vt patet, cæterum hoc nil aliud est, quàm diuidere AB, in duas partes, vt quadratum vnius, plus quadrato ex AC; ad quadratum alterius plus quadrato ex BE, sit in duplicata ratione 2, ad 5, nempe, vt 2, ad $12\frac{1}{2}$.



Pars vna est 1 R; alia erit $26 - 1R$: quadratum illius est 1 Q; cui addito 64; quadrato ex AC 8; fit $64 + 1Q$; deinde quadratum ex $26 - 1R$ est $676 - 52R + 1Q$; cui addito 225; quadrato ex BE 15, fit $901 - 52R + 1Q$, ergo ℞$(64 + 1Q)$ ad ℞$(901 - 52R + 1Q)$ debet esse vt 2; ad 5; seu $64 + 1Q$, ad $901 - 52R + 1Q$, debet esse vt 2, ad $12\frac{1}{2}$, seu vt 4, ad 25; erit igitur $1600 + 25Q = 3604 - 208R + 4Q$, & per antithesin $1600 + 25Q + 208R = 3604 + 4Q$, & rursus $1600 + 21Q + 208R = 3604$, rursus fiet æquatio $21Q + 208R = 2004$, instituto parabolismo, fit $1Q + \frac{208}{21}R = \frac{2004}{21}$

Huius

Huius equationis radix est 6, nam dimidium numeri radicum est $\frac{104}{21}$ cuius quadratum $\frac{10816}{441}$ si addatur ad $\frac{2004}{21}$ seu quod idẽ est $\frac{42084}{441}$ fit numerus 52900; cuius latus quadratum est 230, & erit $\frac{230}{21}$, ab hoc autem subtracto $\frac{104}{21}$ dimidio numeri radicum remanet $\frac{126}{21}$, nimirum 6; quamobrẽ; pars vna erit 6; altera erit 20 &c.

$$\begin{array}{r} 2004 \\ 21 \\ \hline 2004 \\ 4008 \\ \hline 42084 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 104 \\ 104 \\ \hline 416 \\ \hline 000 \\ 104 \\ \hline 10816 \\ 32084 \\ \hline 52900 \\ 230 \\ \hline \end{array}$$

SCHOLION.

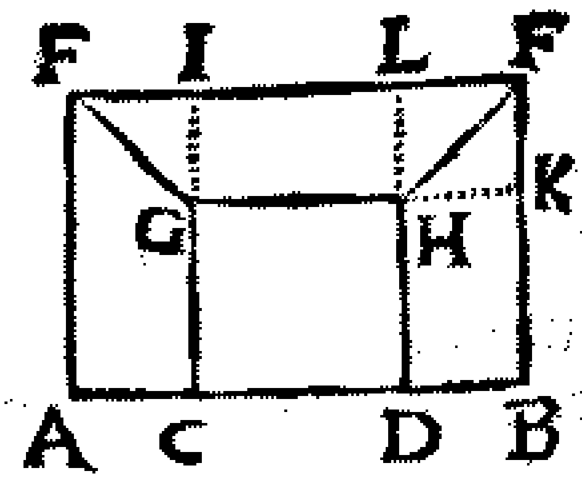
Rectè dicebamus id nil aliud esse quàm diuidere A B, in duas partes, vt summa quadratorum ex vna parte sit ad summã Quadratorum ex alia in duplicata ratione 2, ad 5; si enim recta potens duo quadrata, ad rectam potentem alia duo, est vt 2, ad 5; quadratum, ad quadratum erit in ratione duplicata vt constat ex 20. prop. 6. Elementorum.

$$\frac{104}{21} \qquad \frac{230}{21} \qquad \begin{array}{r} 230 \\ 104 \\ \hline 126 \\ \hline 21 \end{array} \; 6$$

PROBLEMA DECIMVM QVARTVM.

Datum sit rectangulum A B F E; constet autem latus vnum ipsius nimirum maius, quale est E F, esse 10; at verò F B, latus minus esse 6; in eoq; descriptum sit parallelogrammum rectangulum C G H D; quod sit quarta pars totius AEFB, adeo vt ACGE, GEFH, HFBD, & CGHD, sint æqualia; quorum vnumquodq; est quarta pars totius AEFB; quæritur quanta sit G H, & quanta H D.

Producatur C G, ad I, & G H, ad K, quoniam igitur rectangulum CGHD, æquale est trapetio G E F H, ob id rectangulum G I F K, quod est illi trapetio æquale, erit æqua-



æquale rectãgulo CGHD, quamobrem erit a vt FI, ad GH, ita DH, ad GI, est autem GH, differentia, qua FI, superat IE, diuidenda sunt igitur latera EF FB, in duobus punctis I K, ea lege, vt quemadmodum est FI, ad GH, seu IL, differentiam, &c. ita sit GI, seu FK, ad HD, seu KB.

a 17. Sexti

Dico igitur GH, esse 2R, ob id IF erit 5 + 1 R, quemadmodum EI, erit 5—1R, harum autẽ partium summa est 10, Vt autem 5 + 1 R, ad 2 R, ita debet esse BK, ad KF, quamobrem fiat, vt 5 + 1 R, ad 2 R, ita vna pars, ad alteram, quarum summa sit 6, nimirum BF, Addatur 2 R, differentia, ad 5 + 1 R, partem vnam, & fit 4 + 3 R, per hanc diuidatur 6, fit quotiens $\frac{6}{5+3R}$ modò hic ducatur in illas partes 5 + 1 R, & 2 R, fiunt numeri producti 30 + 6R, & 12 R, diuidantur per communem diuisorem, & erunt $\frac{30+6R}{5+1R}$, & $\frac{12R}{5+1R}$ in ratione data, conficientes simul additę numerum 6, & erunt hi termini proportionales.

$$5+1R \qquad 2R, \qquad \frac{30+6R}{5+3R} \qquad \frac{12R}{5+3R}$$

Sumamus productum, vel ab extremis, vel à medijs: sunt enim vnum, & idem $\frac{60R+12Q}{5+3Q}$, & erit ęquale quartæ parti totius rectanguli CB; quod est 60; ergo æquabitur numero 15, quartæ parte totius.

$$\frac{60R+12Q}{5+3R} = 15.$$

Tollatur fractio per communem multiplicationem, & erit æquatio 60R + 12Q = 75 + 45R; per antithesin verò 15R + 12Q = 75, siue 12Q + 15R = 75, omnibus autem applicatis ad 12; fiet æquatio 1 Q + 1 $\frac{1}{4}$ R = 6 $\frac{1}{4}$.

$\frac{5}{4}$ Di-

$\frac{5}{8}$ *Dimidium numeri Radicum.*
$\frac{25}{64}$ *Quadratum dimidij numeri Radicum.* } *Adde*
6 *Numerus absolutus.*

$6\frac{41}{64}$ *Aggregatum.*
℞ $6\frac{41}{64}$ *Aggregati latus.* } *Subtrahe*
$\frac{5}{8}$ *Dimidium numeri radicum.*

Erit igitur 1 R, valor ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$. Illius autem æquationis eam esse radicem patet ex præceptis artis. Diuidatur ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$ per 4; & fit quotiens, siue quarta pars radicis ℞ $\frac{425}{1024} - \frac{5}{32}$ hæc autem quarta pars radicis addita ad vnam Radicē (est enim in æquatione numerus radicum $1\frac{1}{4}$ R) facit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ quandoquidem si ad $-\frac{5}{8}$ addamus $-\frac{5}{32}$ fit $-\frac{25}{32}$. Si verò ad ℞ $6\frac{41}{64}$ addatur ℞ $\frac{225}{1024}$ fit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ sunt enim commensurabiles ℞ $\frac{425}{64}$ & ℞ $\frac{425}{1024}$. Si quidem quadratum vnius, in alterius quadratum facit $\frac{180625}{65536}$

℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$
℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$

$6\frac{41}{64} - ℞\frac{10625}{4096} + \frac{25}{64}$
$\phantom{6\frac{41}{64}} - ℞\frac{10625}{4096}$

$7\frac{1}{32} - ℞\ 10\frac{1540}{4096}$ Radicis quadratum.
℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ Radicum pretium.

$6\frac{1}{4}$ Summa.

℞ $\frac{425}{64} - \frac{5}{8}$ Radix.
℞ $\frac{425}{1024} - \frac{5}{32}$ Quarta pars radicis.

℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ Summa, & radicum numerus

seu

$$6\,\frac{41}{64} \qquad 3\,\frac{82}{256}$$

$$9\,\frac{1540}{4096} \qquad \text{℞}\,10\,\frac{1540}{4096}$$

1024
64
4096
6144
65536

$$\frac{65536}{256}$$

256
64
1024
1536
16384

$$\frac{82}{256} \times \frac{41}{64}$$

82
64
328
492
5248

256
41
256
1024
10496
5248
15744

$$\frac{625}{1024} \times \frac{15744}{16384}$$ seu quod idem est $\frac{123}{128}$.

16384
1024
65536
32768
163840
16777216

15744
1024
62976
31488
15744
16121856
6963200
23085056

$$1\,\frac{6308040}{16777216}$$

Ipsius

Ipsius autem $\frac{180625}{65536}$ radix quadrata est $\frac{425}{256}$ cuius duplum est $\frac{850}{256}$ hoc est $3\frac{82}{256}$. Si verò ad 6, addatur 3, fit 9. Si $\frac{82}{256}$ addatur ad $\frac{41}{64}$ fit $\frac{123}{128}$; namq; si huius fractionis, scilicet, $\frac{41}{64}$ duplicemus numeratorem, & denominatorem fiet; $\frac{82}{128}$ si verò sumamus dimidium, tàm numeratoris, quàm denominatoris, illius fractionis $\frac{82}{256}$ fit $\frac{41}{128}$ modò fractiones sunt redactæ ad eandem denominationé. Si addantur numeratores, fiet fractio $\frac{123}{128}$ quæ quidem fractio, addita ad $\frac{425}{1024}$ facit summam $1\frac{49280}{131072}$ hoc est $1\frac{1540}{4096}$ quę addita ad 9. facit $10\frac{1540}{4096}$ ob id summa erit ℞ $10\frac{1540}{4096}$ at verò — ℞ $10\frac{1540}{4096}$ addita ad + ℞ $10\frac{1540}{4096}$ nihil remanet. Si verò ad $7\frac{1}{32}$ addatur — $\frac{31}{32}$ fit $6\frac{1}{4}$. Igitur si ad $7\frac{1}{32}$ — ℞ $10\frac{1540}{4096}$ quadratum radicis addatur ℞ $10\frac{1540}{4096}$ — $\frac{31}{32}$ radicum pretium, fit $6\frac{1}{4}$ vt oportebat.

$\frac{123}{128} \times \frac{425}{1024}$

1024	1025
128	123
8192	3672
2048	2048
1024	1024
131072	125952
	54400
	180362

$\frac{49280}{\text{Diuisor } 32}$ | 1540 $\frac{180352}{131072}$ | $1\frac{48280}{131072}$

$\frac{131072}{\text{Diuisor } 32}$ | 4096 hoc est $1\frac{1540}{4096}$

$\frac{41}{64}$ $\frac{81}{256}$ $\frac{82}{128}$ $\frac{41}{128}$ 82 / 41 / $\frac{123}{128}$

Modo videndum, ex additione huius fractionis nimirum

rum $\frac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{3} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ ad hanc $\frac{℞\,956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ fieri numerum 6.

$$\begin{array}{r} ℞\,956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2} \\ 26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16} \\ \hline 18\frac{3}{4} + ℞\,2151\frac{9}{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7650 \\ 2 \\ \hline 15300 \\ \hline 16 \end{array}$$

In primis addantur numeratores; & ex + $26\frac{1}{4}$ ad $- 7\frac{1}{2}$ fit $18\frac{3}{4}$, & fit + ex ℞ $239\frac{1}{16}$ ad ℞ $956\frac{4}{16}$ fit ℞ $2151\frac{9}{16}$. Propterea quod ℞ $239\frac{1}{16}$ & ℞ $956\frac{4}{16}$ sunt commensurabiles; Si igitur $\frac{15300}{16}$ (hæc fractio idem est, quod $956\frac{4}{16}$) ducatur in $\frac{3825}{16}$ fit $\frac{58522500}{256}$ huius radix quadrata est $\frac{7650}{16}$ huius duplum est $\frac{15300}{16}$ quadrata illarum fractionum sunt $\frac{15300}{16}$ & $\frac{3825}{16}$ horum summa est $\frac{34425}{16}$ nempe $2151\frac{9}{16}$. Proinde si ℞ $239\frac{1}{16}$ addatur ad ℞ $956\frac{4}{16}$ fit summa ℞ $2151\frac{9}{16}$. Itaq; numerator

$$\begin{array}{r} 956 \\ 16 \\ \hline 5736 \\ 956 \\ \hline 15296 \\ 4 \\ \hline 15300 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 239 \\ 16 \\ \hline 434 \\ 239 \\ \hline 4824 \\ 1 \\ \hline 3825 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15300 \\ 3825 \\ \hline 76500 \\ 30600 \\ 122400 \\ 45900 \\ \hline 58522500 \end{array}$$

rator erit $18\frac{3}{4} + \text{℞}\,2151\frac{9}{16}$, & denominator erit $3\frac{1}{8} + \text{℞}\,59\frac{49}{64}$, & stabit hoc modo.

$$\frac{18\frac{3}{4} + \text{℞}\,2151\frac{9}{16}}{3\frac{1}{8} + \text{℞}\,59\frac{49}{64}}$$

Eritq; summa quæsita. Constat autem hanc fractionem valere 6; namq; $3\frac{1}{8}$, in $18\frac{3}{4}$ continetur sexies; seu metitur $18\frac{3}{4}$, per 6, & ℞ $59\frac{49}{64}$, metitur ℞ $2151\frac{9}{16}$, per 6, vt patet, si $3\frac{1}{8}$ multiplicemus per 6, fit $18\frac{3}{4}$. Si verò ℞ $59\frac{49}{64}$ multiplicemus per 6, fit ℞ $2151\frac{9}{16}$. Quod autem si ducatur ℞ $26\frac{9}{16} - 1\frac{1}{4}$ in $\frac{26\frac{1}{4} + \text{℞}\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{8} + \text{℞}\,59\frac{49}{64}}$ producatur 15; quarta pars totius rectanguli 60, facilè constabit.

$3\frac{1}{8}$
6
$18\frac{6}{8}$ seu $\frac{3}{4}$

$59\frac{49}{64}$
36
354
177
2124
$27\frac{36}{64}$
$2151\frac{9}{16}$

49
36
294
147
1764

$26\frac{1}{4} + \text{℞}\,239\frac{1}{16}$
$\text{℞}\,26\frac{9}{16} - 1\frac{1}{4}$

$-\,32\frac{13}{16} - \text{℞}\,\frac{76500}{256}$

$\text{℞}\,\frac{178500}{256} + \text{℞}\,\frac{1615625}{156}$ hoc est $79\frac{1}{16}$

$$\frac{\text{℞}\,13447\frac{27}{64} + 46\frac{14}{16} \text{ seu } 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + \text{℞}\,59\frac{49}{64}}$$

Hæc autem fractio $\frac{\text{℞}\,13447\frac{27}{64} + 46\frac{14}{16} \text{ seu } \frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + \text{℞}\,59\frac{49}{64}}$ valet 15; quandoquidem $3\frac{1}{8}$ metitur $46\frac{7}{8}$ per 15, & ℞ $59\frac{49}{64}$ metitur ℞ $13447\frac{17}{64}$ per 15. Itaq; si ducamus ℞ $26\frac{9}{16} -$ $1\frac{1}{4}$ in

$1\frac{1}{4}$ in $\dfrac{26\frac{1}{8} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ fit 15; vt oportet.

Quod autem ex multiplicatione quoq; ℞ $956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}$ per $4\frac{3}{8}$ + ℞ $6\frac{41}{64}$ producatur idem numerus 15, patet; siquidem, dum multiplicamus $7\frac{1}{2}$ per $6\frac{41}{64}$ producitur ℞ $\frac{95625}{256}$ at + in − ductum facit − deinde dum ducitur ℞

$$℞\,956\tfrac{4}{16} - 7\tfrac{1}{2}$$
$$4\tfrac{3}{8} + ℞\,6\tfrac{41}{64}$$

$$79\tfrac{11}{16} - ℞\,\frac{95625}{256}$$

$$℞\,18302\,\frac{11584}{16384} - 32\tfrac{13}{16}$$

$$\frac{℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$$

$6\frac{41}{64}$ in ℞ $956\frac{4}{16}$ producitur ℞ $\frac{6502500}{1024}$ Radix quadrata numeratoris est 2550, denominatoris est 32. Itaq; productum erit $\frac{2550}{32}$ hoc est $79\frac{11}{16}$ at ductum + in + facit +. Deinde dum ducitur $4\frac{3}{8}$ in $7\frac{1}{2}$ fit $32\frac{13}{16}$ & + in − facit −. Deniq; si ducatur $4\frac{3}{8}$ in ℞ $956\frac{4}{16}$ fit ℞ $18302\frac{11584}{16384}$ Summa verò horum productorum

$$\frac{6502500}{2550} \quad \frac{1024}{32}$$

& $\dfrac{℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$.

Quandoquidem si + $79\frac{11}{16}$ & − $32\frac{13}{16}$ simul addantur, fit + $46\frac{7}{8}$. Si verò + ℞ $18302\frac{11584}{16384}$ ad − ℞ $\frac{95625}{256}$

adda-

addatur fit summa ℞ 13447 17/64. Itaq; erit productum ℞ 13447 17/64 + 46 7/8 cui subscribi debet idem denominator 3 1/8 + ℞ 59 49/64 vt fiat fractio ista ℞ $\frac{13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ dum nimirum multiplicatur fractio illa supra posita ℞ $\frac{956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ in alteram $\frac{4\frac{7}{8} - ℞\,6\frac{31}{64}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$

Quemadmodum explicuimus; At verò liquet fractionem illam productam ℞ $\frac{13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ valere 15; siquidem, & 3 1/8, metitur 46 7/8 per 15; & ℞ 59 49/64 metitur pariter ipsam ℞ 13447 17/64 per 15.

Prima igitur I F, posita 5 + 1 R, erit 4 3/8 + ℞ 6 31/64.

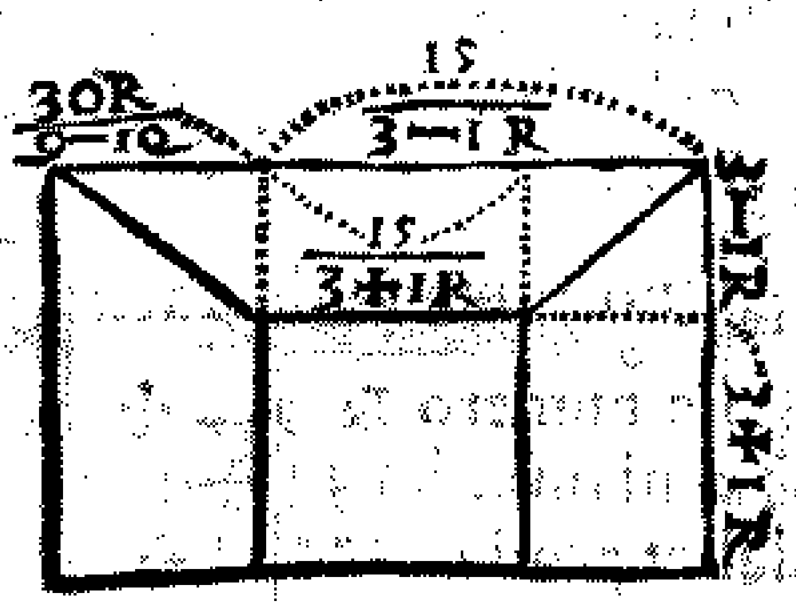
Secunda G H, seu I L posita 2 R, erit ℞ 26 9/16 — 1 1/4.

Tertia H D, seu K B, posita $\frac{30 + 6R}{5 + 3R}$ erit

$\frac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{9}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$.

Quarta IG, seu FK, posita $\frac{12R}{5 + 3R}$ erit ℞ $\frac{956\frac{4}{16} \text{ seu } \frac{1}{4} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$

Aliter eidem Problemati satisfieri potest. Pars B K, esto 3 + 1 R, reliqua K F, erit 3 — 1 R; harum summa est 6; vt patet, quoniam 3 + 1 R, pars maior numeri 6, si ducatur in differentiam partium numeri 10; debet producere 15, quemadmodum pars minor eiusdem numeri 6, ducta in partem maiorem numeri 10; debet efficere 15; sunt enim proportionales; ob id diuidatur 15, per 3 + 1 R, *Secunda resolutio Problematis.*



& fiet $\frac{15}{3+1R}$ differentia partium lateris maioris 10; deinde

deinde diuidatur numerus 15, per $3 - 1R$, & fiet quotiens $\frac{15}{3 - 1R}$ pro parte maiori eiusdem 10; à quasi subtrahatur $\frac{15}{3 + 1R}$ remanebit $\frac{30R}{9 - 1Q}$ pro parte minori eiusdem 10; si igitur $\frac{30R}{9 - 1Q}$, addatur ad $\frac{15}{3 - 1R}$ fiet summa $\frac{45 + 45R}{9 - 1Q}$ æqualis 10; Atq; adeo $45 + 45R = 90 - 10Q$, & ordinata æquatione fiet $45 + 10Q + 45R = 90$, & vtrinq; sublatis 45; erit $10Q + 45R = 45$; diuisione verò instituta, fit æquatio $1Q + 4\frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2}$. Huius autem æquationis radix reperietur, si sumatur $5\frac{1}{16}$ quadratum dimidij numeri radicum, & addatur numero absoluto; fiet enim $9\frac{9}{16}$, huius radix quadrata est ℞$9\frac{9}{16}$; à qua subtrahi debet $2\frac{1}{4}$ dimidium numeri radicum, remanet ℞$9\frac{9}{16} - 2\frac{1}{4}$ & est 1R; valor; Itaq; pars, quæ ponebatur $3 + 1R$, erit ℞$9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$. Idem est autem ℞$9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$, ac est fractio $\frac{26\frac{1}{4} + ℞239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{2} + ℞59\frac{49}{64}}$ elicita in superiori methodo.

$$
\begin{array}{c}
1Q + 4\frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2} \\
2\frac{1}{4} \\
\underline{2\frac{1}{4}} \\
4 \\
\underline{1} \\
5\frac{1}{16} \\
\underline{4\frac{8}{16}} \\
9\frac{9}{16} \\
℞9\frac{9}{16} - 2\frac{1}{4}
\end{array}
$$

Cæteræ partes non latebunt, altera namque ipsius 6, erit $5\frac{1}{4} -$ ℞$9\frac{9}{16}$, alias quoq; facile est reperire.

Quòd autem illa fractio $\frac{26\frac{1}{4} + ℞239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{2} + ℞59\frac{49}{64}}$ æqualis sit huic numero ℞$9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$, ostendemus hunc in modum; Quoniam enim $3\frac{1}{2} +$ ℞$59\frac{49}{64}$, si ducatur in ℞$9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$; debet producere $26\frac{1}{4} +$ ℞$239\frac{1}{16}$, proinde; multiplicemus prædictos numeros inter se; si itaque ducamus $\frac{3}{4}$ in ℞$59\frac{49}{64}$ fiet ℞$\frac{34425}{1024}$ si verò multiplicemus $3\frac{1}{2}$ per $\frac{3}{4}$, pro-

duce-

$3\frac{1}{8}$ ✠ ℞ $59\frac{49}{64}$

℞ $9\frac{9}{16}$ ✠ $\frac{3}{4}$

$\frac{75}{32}$ ✠ ℞ $\frac{34425}{1024}$

℞ $\frac{95625}{1024}$ ✠ ℞ $\frac{585225}{1024}$

$26\frac{1}{4}$ ✠ ℞ $239\frac{1}{16}$.

ducetur $\frac{75}{32}$; at verò multiplicata ℞ $9\frac{9}{16}$ per ℞ $59\frac{49}{64}$; fit ℞ $\frac{585225}{1024}$ habet autem radicẽ hic numerus factus $\frac{585225}{1024}$ & est $\frac{765}{32}$ hoc est $23\frac{29}{32}$. Preterea si ducatur ℞ $9\frac{9}{16}$ in $3\frac{1}{8}$. Fit ℞ $\frac{95625}{1024}$; at verò si $\frac{75}{32}$ addantur ad $23\frac{29}{32}$ fit summa $26\frac{1}{4}$; insuper quoniam ℞ $\frac{34425}{1024}$ & ℞ $\frac{95625}{1024}$ sunt cõmensurabiles; communis enim diuisor est ℞ 153; quæ diuidens ℞ 34525 facit quotientem ℞ 225; nempe 15; & diuidens ℞ 95625 facit quotientem ℞ 625; cuius radix quadrata est 25; at verò 40, est summa ex 15, & 25; quadratum eius est 1600, quo ducto in 153, quadratum communis

34425	225	
153	15	
95625	625	
153	25	

$$\begin{array}{r} 15 \\ 25 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 1600 \\ 153 \\ \hline 4800 \\ 8000 \\ 1600 \\ \hline 244800 \end{array}$$

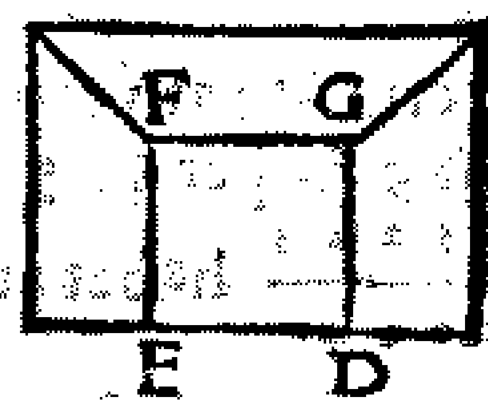
$\frac{244800}{1024}$ | $239\frac{1}{16}$

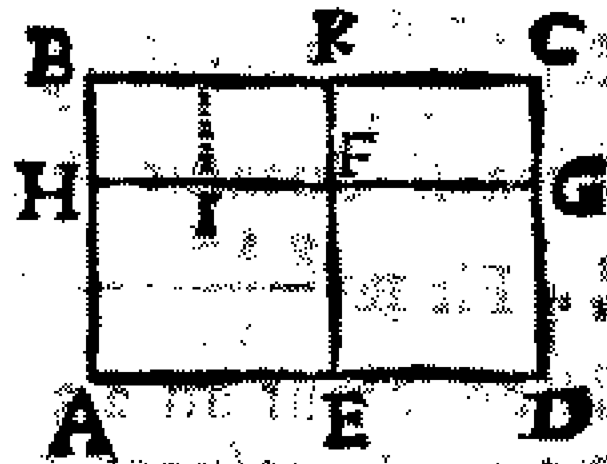
diui-

diuisoris, fit 244800 atq; adeo erit $\frac{244800}{1024}$ huius latus quadratum est ℞ 239 $\frac{1}{16}$ nam si 244800, diuidatur per 1024, fit 239 $\frac{1}{16}$, cuius radix quadrata est ℞ 239 $\frac{1}{16}$.

Duobus modis hucusq; proposito Problemati satisfecimus; placet etiam alia via incidenter idem Problema enodare; Quamobrem satisfaciemus,

Aliter ijsdem suppositis; & latus maius esse 10, latus verò minus esse 6; sit rectangulum EFGD, quarta pars totius rectanguli; adeo vt si FH; secetur bifariam in I; rectangulum IC; sit quoq; quarta pars; atq; adeo eidem EG, æquale; adeo nimirum vt, AC, rectangulũ ad EG, vel ad IC, rationem habeat, vt 4, ad 1, quæritur FE, siue GD, Dico igitur eam esse 1 R; rectangulum AC; erit 60; & EG, erit $\frac{60}{4}$; hoc enim modo erit vt 4, ad 1 ita 60, ad $\frac{60}{4}$. Sed rectangulum FG, erit $\frac{60}{4R}$; at BH; erit 6 — 1 R, & BK; erit 10 — $\frac{60}{4R}$. Rectangulum verò HK, erit illud, quod fit sub BH; 6 — 1 R, & BK; 10 — $\frac{60}{4R}$ rectangulum autem est 60 — $\frac{360}{4R}$ — 10R + $\frac{60}{4}$, rectangulum verò FC, erit $\frac{360}{4R}$ — $\frac{60}{4}$.





$$10 - \frac{60}{4R}$$
$$6 - 1R$$
$$- 10R + \frac{60}{4}$$
$$60 - \frac{360}{4R}$$
$$60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60R}{4R} \text{ seu } \frac{60}{4}$$

Du-

Duplum verò rectangulum, IC, seu rectangulum duplum IK, plus duplo rectangulo FC, seu rectangulum HK, plus duplo rectangulo FC, est, $60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60}{4} + \frac{720}{4R} - \frac{120}{4}$ seu $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum EG, est $\frac{120}{4}$ $60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60}{4} + \frac{360}{4R} - \frac{120}{4}$. Vel $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum EG, est $\frac{120}{4}$. Sed ex hypotesi æqualia sunt IC, EG, ob id eorum dupla etiam erunt æqualia, $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R} = \frac{120}{4}$. Addita verò fractione $\frac{360}{4R}$ vtrinq; fiet æquatio $60 - 10R + \frac{360}{4R} = \frac{180}{4}$ Diuisis autem omnibus per 10 fit $6 - 1R + \frac{36}{4R} = \frac{18}{4}$. Atq; adeo $6 - 1R + \frac{9}{4} = 4\frac{1}{2}$. Ductis omnibus in 1 R; fit æquatio $6R - 1Q + 9 = 4\frac{1}{2}R$.

Proinde $6R + 9 = 4\frac{1}{2}R + 1Q$; Et rursus $1\frac{1}{2}R + 9 = 1Q$. Deniq; $1Q - 1\frac{1}{2}R = 9$. Huius autem æquationis radix ita eruetur. Dimidium numeri radicum est $\frac{3}{4}$ quadratum huius est $\frac{9}{16}$ quo addito ad 9, fit $9\frac{9}{16}$ cuius radix quadrata est ℞ $9\frac{9}{16}$ quæ si addatur ad $\frac{3}{4}$ dimidium numeri radicum, fiet ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$ Partes autem reliquæ non latebunt.

SCHOLION.

Eandem etiam æquationem essemus consequuti, si nimirum à nobis positum fuisset $\frac{60R + 12Q}{5 + 3R} = 60$. *In pri-*

mo scilicet modo istarum resolutionum; quandoquidem fuisset

aequatio $\frac{240R + 48\mathcal{Q}}{5 + 3R} = 60$.

Atq; adeo $240R + 48\mathcal{Q} = 300 + 48\mathcal{Q} = 300$, proinde $48\mathcal{Q} + 60R = 300$, factoq; parabolismo; eadem aequatio, vt ibi $1\mathcal{Q} + 1\frac{1}{4}\mathcal{Q} = 6\frac{1}{4}$ consurgeret; quod animaduertisse volumus.

Qua arte duo proposita latera diuidantur. Nota.

Hinc autem perspicuum fit; qua arte duo latera proposita diuidere valeamus; & ne vtamur ijsdem numeris; Sint 20; & 12; & oporteat diuidere vtrumq; in tales duas partes nimirum 12; in duas tales partes; & 20, in duas quoq; huiusmodi partes; quod minor pars numeri 12; ad maiorem sit vt differentia partium numeri 20; ad maiorem partem eiusdem numeri 20; multiplicata verò minori parte ipsius 12; in maiorem numeri 20; fiat 60.

Pars maior numeri 12; esto $6 + 1R$, minor erit $6 - 1R$; pars autem minor numeri 12; ducta in partem maiorem numeri 20; tantum facit, quantum differentia partium numeri 20; ducta in partem maiorem numeri 12, & vtrumq; productum debet efficere 60; ob id oportet diuidere 60, per $6 + 1R$; vt habeatur $\frac{60}{6 + 1R}$ pro differentia duarum partium ipsius 20; deinde diuidatur idem numerus 60 per $6 - 1R$, & habebimus $\frac{60}{6 - 1R}$ pro parte maiori ipsius 20; vt autem minorem partem indagemus, subtrahatur differentia partium numeri 20; nimirum $\frac{60}{6 + 1R}$ ab ipsa maiori parte $\frac{60}{6 - 1R}$ & remanebit $\frac{120R}{36 - 1\mathcal{Q}}$: hoc autem residuum si addatur $\frac{60}{6 - 1R}$ maiori parti numeri 20; habebimus $\frac{360 + 180R}{36 - 1\mathcal{Q}}$; hoc autem aequatur numero 20; & extracta radice secundum artem reperiemus 1R, pretium ℞ $38\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}$; atq; adeo partes non latebunt.

A D

ADMONITIO.

Cæterum superiùs allatum Problema illud est; quod mihi resoluendum propositum fuit; Vnusquisq; videbit ex dictis me Questioni per modum Zeteseos propositæ satisfecisse; in Algebra verò Speciosa; seu potiùs in Tractatu de Resolutione, & Compositione Mathematica conspiciet, me idem Problema de parallelogrammo propositum analyticè explicasse, & ipsius analyseos vestigijs obseruatis composuisse; atq; adeo Geometricè fæliciter illud enodasse. Verùm enim verò in libro, cui titulum fecimus Diuersorum Problematum colectio; in quo quamplurima sumus Problemata explicaturi; & similia huic, & longè dificiliora in Artis illustrationem enodabimus. Interim enim hoc, cum alijs, hisce attulimus vt statim Artis præcepta tradita, exemplis quoq; conspicerentur illustrata; non enim dubium, quin præcepta ipsa longè faciliùs percipiantur, dum praxim reuocata conspiciuntur. Longè tamen iucundius erit Problemata, & numeris enodata, & beneficiò speciosæ Logistices resoluta; repetitisq; ipsius analyseos vestigijs, composita (quando tamen Problematis natura id patitur) atq; Geometricè demonstrata conspicere, quod nos in præcitato loco præstabimus. Quinimo nostras quoq; partes esse putamus, non solum nouæ, vt dictum est, ed etiam veteris, seu numerosæ logistices sic Problemata Geometrica enodare; vt constet ea vti nos possemus ad affectionem Geometricam comparandam, relicta demonstrationis cura doctrinæ ex Elementis Euclidis excerptæ; Artem tamen ipsam huiusmodi logisticen scilicet ad id consequendum in Tractatu de Resolutione, & compositione Mathematica explicabimus; & quidem copiosiùs, quàm in nostro Opere hac de re pridem edito præstiterimus. *Nota.*

PROBLEMA DECIMVM QVINTVM.

Data base trianguli, datis etiam excessibus, quibus crura superant perpendicularem ipsius. oportet reperire trianguli latera, & perpendicularem.

Hoc Problema duplicem casum habet, Vel enim perpendicularis cadit intra triangulum; quo casu oportet compositum ex excessibus minorem esse base, vel cadit extra, quo casu necesse est differentiam excessuum minorem esse basse.

PRIMVS CASVS.

Data sit basis 21, & excessus quo crus maius superat perpendicularem sit datus 8; excessus, quo crus minus superat eandem sit 1.

Supponendum differentiam excessuum idem esse, ac differentiam laterum. Differentia segmentorum basis sit 1 R quamobrem 21 + 1 R, erit duplum segmentum maius quapropter ipsum segmentum maius erit 10 1 + 1 R. At verò rectangulum comprehensum sub differentia laterum, & eorundē aggregato, æquale est illi, quod compræhenditur sub differentia segmentorū basis, & ipsa basi; proinde erit, vt 7. differentia laterū siue differentia excessuū ad 1 R, ita 21, aliud puta $\frac{21 R}{7}$ adeo vt, aggregatum laterum sit $\frac{21 R}{7}$. huic subtrahatur excessus, quo latus minus superat perpendicularem; vt fiat reliquum $\frac{21 R}{7} - 1$ est autem rectangulum sub excessu quo latus maius superat perpendicularem, & sub aggregato ex latere maiori, & perpendiculari, æquale quadrato segmenti maioris, quod est 10 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ R. Proinde $\frac{168 R}{7} - 8$, quod est rectangulum sub $\frac{21 R}{7} - 1$; nempe aggregato laterum minus differentia, qua latus minus superat perpendicularem, atq; adeo aggregatum ex latere maiori, & perpendiculari sub 8, excessu, quo latus maius superat perpendicularem, æquabitur $\frac{441}{4}$ + $\frac{1}{4}$ Q 10 $\frac{1}{2}$ R, quadrato segmenti maioris; vt constat ex multiplicatione; omnibus ductis in 4; fiet $\frac{672 R}{7} - 32 = 441 + 1 Q + 42 R$, & per antithesin $\frac{672 R}{7} - 42 R - 1 Q = 441 + 32$, hoc est 473, seu, quod idem est, 96 R − 42 R; hoc est

54 R − 1 Q = 473

	729	27
27		27
16	256	189
11	16	54
		729

Et

Et extracta radice secundum artem, fiet 1 R, valor 11; & est differentia segmentorum basis. Si verò fiat vt 7, differentia laterum ad 11. differentia segmentorum basis; ita 21; basis ad aliud, nempe 33, inotescet aggregatum laterum, à quo dempta 7, differentia laterum, remanet 26, cuius dimidium est latus minus; nempe 13, maius autem erit 20, nempe 13, plus 7. sic etiam inotescet perpendicularis 12.

Aliter perpendicularis esto 1 R; latus maius erit 8 ✠ 1 R; latus autem minus erit 1 ✠ 1 R, istorum quadrata sunt 1 ✠ 2 R ✠ 1 Q, & 64 ✠ 16 R ✠ 1 Q, vtrinq; sublato 1 Q; nempe quadrato perpendicularis, remanebit 1 ✠ 2 R, quadratum segmenti minoris, & 64 ✠ 16 R; quadratum segmenti maioris; quamobrem segmenta ipsa erunt ℞ (1 ✠ 2 R) & ℞ (64 ✠ 16 R) si verò inuicem multiplicentur; & producti sumatur duplum, fiet ℞ (256 ✠ 576 R ✠ 128 Q) addatur hoc ad 1 ✠ 2 R; & 64 ✠ 16 R, quadrata segmentorum, vt habeatur 65 ✠ 18 R ✠ ℞ (256 ✠ 576 R ✠ 128 Q) quod æquabitur 441, quadrato nimirum basis; vtrinq; auferatur 65 ✠ 18 R, fiet æquatio ℞ 256 ✠ 576 R ✠ 128 Q) ═ 376 — 18 R; ergo etiam quadrata erunt inter se æqualia 256 ✠ 576 R ✠ 128 Q ═ 141376 — 13536 R ✠ 324 Q, & obseruatis Artis præceptis; fiet 72 R — 1 Q ═ 720, cuius radix est 12. *Aliter idē Problema resoluitur.*

SECVNDVS CASVS.

Dati sint excessus 3; & 8, data sit basis 7; compositum ex dupla intercepta, & basi, dico esse 1 R, ergo 1 R ✠ 7, erit duplum compositi ex base, & intercepta linea vsque ad perpendicularem; quamobrem simplum erit $\frac{1}{2}$ R ✠ 3 $\frac{1}{2}$; quoniam autem rectangulum sub differentia laterum, & composito ex lateribus æquale est rectangulo sub basi, & sub aggregato ex basi atq; ex dupla intercepta; proinde erit vt 8 — 3, seu, quod idem est, vt 5, differentia excessuum; atq; adeo differentia laterum; ad 7, basim ita

1 R, ad

1 R, ad $\frac{7\,R}{4}$ cui si auferatur 3, excessus lateris minoris supra perpendicularem remanebit $\frac{7\,R}{5} - 3$, pro aggregato ex latere maiori, & perpendiculari; est autem rectangulum sub hoc aggregato, & excessu lateris maioris supra perpendicularem; puta 8; æquale quadrato aggregati ex base, & intercepta inter basim, & perpendicularem; proinde $\frac{7\,R}{5} - 3$, ducatur in 8; & fit $\frac{56R}{5} - 24$, quod æquale est $\frac{1}{4}\,Q + \frac{49}{4} + 3\frac{1}{2}\,R$, ductis omnibus in 4, ad integrandam potestatem, & erit $\frac{224\,R}{5} - 96 = 1\,Q + 49 + 14\,R$ atq; adeo $\frac{224\,R}{5} - 14\,R - 1\,Q = 49 + 96$ hoc est $44\frac{4}{5}\,R - 14\,R$, hoc est $30\frac{4}{5}\,R - 1\,Q = 145$; cuius æquationis radix est 25.

Aliter iisdem positis; nempe 8; 3; pro differentijs sitq; basis 7; vt priùs. Perpendicularis esto 1 R, latus minus erit $3 + 1\,R$, eius quadratum est $9 + 6\,R + 1\,Q$, à quo dempto 1 Q; quadrato nimirum perpendicularis, remanebit $9 + 6\,R$; cuius ℞ Q; nempe ℞ $(9 + 6\,R)$ erit intercepta linea inter perpendicularem, & angulum trianguli, at verò quadratum ex A latere maiori est $64 + 16\,R + 1\,Q$, à quo dempto 1 Q, nempe quadrato perpendicularis, remanebit $64 + 16\,R$; cuius ℞ Q, est ℞ $(64 + 16\,R)$ habebitur aggregatum ex base, & ex recta illa intercepta; si ad ℞ $(9 + 6\,R)$ addatur 7; fiet enim ℞ $(9 + 6\,R) + 7$, quod æquabitur ℞ $(64 + 16\,R)$ at verò

Alias via idem problema resoluitur.

$$\begin{array}{r} 3 + 1\,R \\ 3 + 1\,R \\ \hline 3\,R + 1\,Q \\ 9 + 3\,R \quad \\ \hline 9 + 6\,R + 1\,Q \end{array}$$

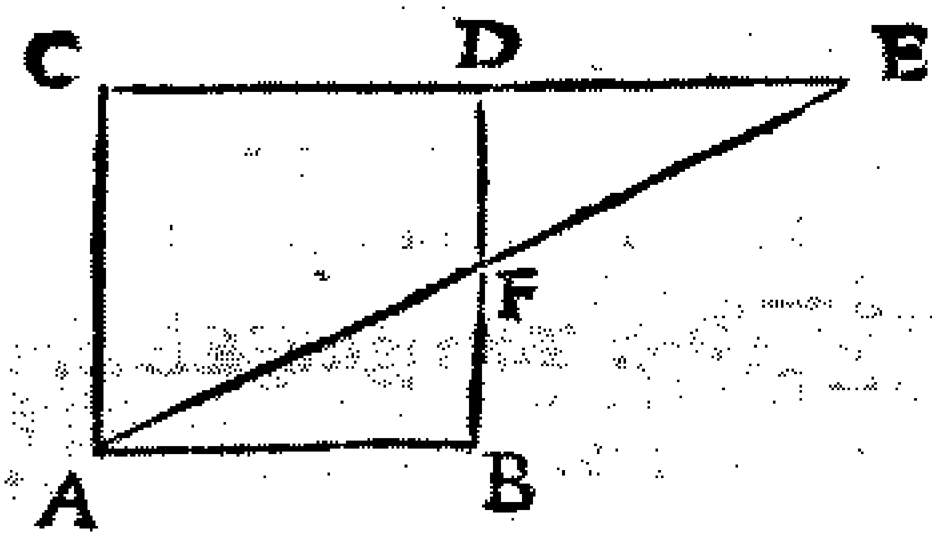
$$\begin{array}{r} 8 + 1\,R \\ 8 + 1\,R \\ \hline 8\,R + 1\,Q \\ 64 + 8\,R \quad \\ \hline 64 + 16\,R + 1\,Q \end{array}$$

verò quadratum ex ℞ (9 ✱ 6R) ✱ 7. est ℞ (1764 ✱ 1176R) ✱ 58 ✱ 6R, quod æquabitur 64 ✱ 16R; vtrinque sublatis 58 ✱ 6R fiet æquatio ℞ (1764 † 1176R) = 6 ✱ 10R, atq; adeo 1764 ✱ 1176R = 36 † 120R † 100Q, & consequenter 1728 † 1056R = 100Q; & fiet 1R, valor 12.

PROBLEMA DECIMVMSEXTVM.

Propositum sit quadratum ABCD, cuius latus sit 2; sitq; protractum latus CD; itaut si à puncto A, ducatur recta, quæ occurrat ipsi CD; in E, protracta; triangulum efformet FDE, æquale quadrato iam dicto. Quæritur quanta sit AE, quanta AF.

Dico BF, esse 1R; ergo DF, erit 2 — 1R; quoniam autem angulus ABF, in triangulo ABF, rectus est, atq; adeo æqualis angulo FDE; a 15 primi
angulus autem AFB; æqualis [a] est ipsi DFE, b 32. primi
vtpotè ad verticem; reliquus [b] erit æqualis reliquo; sunt igitur triangula æquiangula, atq; adeo [c] habebunt latera proportionalia; c 4. sexti.
quæ circum æquales angulos; quamobrem, vt 1R, ad 2; scilicet, vt FB; ad BA, ita erit FD nimirum 2 — 1R, ad DE, quare fiat, vt 1R, ad 2; ita 2 — 1R, ad aliud, illud erit $\frac{4 - 2R}{1R}$; & quia triangulum FDE; est dimidium quadrati, cuius latus est 2, quadratum est 4, ob id rectangulum sub



BF, 1R
AB, 2
FD, 2 — 1R
DE, $\frac{4 - 2R}{1R}$

8 — 8R † 2Q = 8R
8 ✱ 2Q = 16R
8 = 16R — 2Q
8R — 1Q = 4

4 — ℞ 12, 1R valor

sub F D, & D E, erit æquale 8; proinde rectangulum sub 7 — 1 R, & $\frac{4 - 2\,R}{1\,R}$ æquale debet esse 8, & facta ordinatione æquationis secundum artem; reperietur 1 R, valor 4 — ℞ 12. Itaq; illi quatuor termini sunt.

4 — ℞ 12, 2; ℞ 12 — 2, $\frac{\text{℞}\,48 - 4}{5 - \text{℞}\,12}$.

Rectangulum autem sub ℞ 12 — 2, & $\frac{\text{℞}\,48 - 4}{4 - \text{℞}\,12}$ debet esse æquale 8, & ita est; propterea quod, si ducamus $\frac{\text{℞}\,48 - 4}{4 - \text{℞}\,12}$ in ℞ 12 — 2. Fit $\frac{32 - \text{℞}\,768}{4 - \text{℞}\,12}$ hoc est 8; Itaq; F B; erit 4 — ℞ 12, pars altera F D, erit ℞ 12 — 2, at verò D E, erit $\frac{\text{℞}\,48 - 4}{4 - \text{℞}\,12}$. Tota igitur CE, erit 2 † $\frac{\text{℞}\,48 - 4}{4 - \text{℞}\,12}$ Vnde A E, non latebit.

℞ 48 — 4
℞ 12 — 2

— ℞ 192 † 8
24 — ℞ 192

32 — ℞ 768

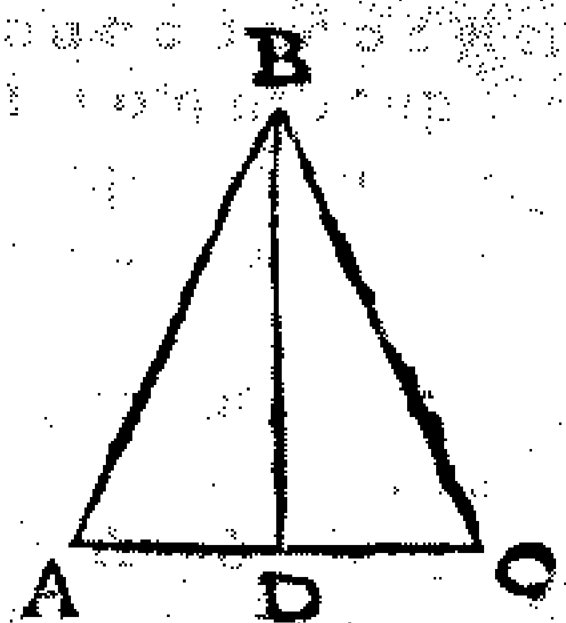
4 — R 12

PROBLEMA DECIMVMSEPTIMVM.

Est triangulum cuius anguli ad basim dupli sunt anguli ad verticem; eiusq; superficies est 10; quæruntur latera.

Reperiamus triangulum aliquod prædictas habens conditiones, sitq; basis eius 2; reperiemus autem latus hoc modo, supponendo illud esse 1 R † 2, diuidendum extrema ac media ratione; ducatur nimirum 2 † 1 R, in 1 R: & oritur 2 R † 1 Q, æquabitur quadrato partis maioris 2; nimirum 4; si enim basis est 2; erit etiam pars maior illius lateris 2; huius autem æquationis radix est ℞ 5 † 1. Itaque pars minor erit ℞ 5 — 1, totum latus ℞ 5 † 1, & pars maior 2, sumatur autem quadratum ex ℞ 5 † 1, illud erit 6 † ℞ 20.

† ℞ 20, à quo si dematur 1, quadratum ex dimidio basis orietur 5 † ℞ 20, cuius ℞ Q est ℞ Q (5 † ℞ 20) hoc autem latus est quantitas perpendicularis istius trianguli. Nunc oportet indagemus Triangulum, cuius superficies est 10, dimidium basis istius debet esse ad suam perpẽdicularem, vt 1, dimidium basis iam inuenti trianguli, ad perpendicularem suam ℞ (5 † ℞ 20) si itaq. dicamus Vt est, 1, ad ℞ Q (5 † ℞ 20) ita sit vnum radicis, ad aliud; illud erit ℞ Q (5 † ℞ 20) Radicis, quæ si inuicem multiplicentur, producent ℞ Q (5 † ℞ 20) quadrati, quod est rectangulum factum sub dimidio basis, & sub perpendiculari, ęquale quidem ipsi triangulo, nimirum 10, quamobrem eorum quadrata, scilicet 5 † ℞ 20 ęquabitur 100. Diuisis 100, per 5 † ℞ 20, quod fit ducendo 5 † ℞ 20 in 5 — ℞ 20 residuum, & fit 5 diuisor, ducantur 100, in idem 5 — ℞ 20, & fit 500 — ℞ 2000000, quo diuiso per 5, fit ℞ QQ (100 — ℞ 8000) & est 1 R prætium, quo ducto in 2, fit ℞ QQ (1600 — ℞ 2048000) reperiemusque latus esse ℞ Q (℞ 2 8800000 † 800 — ℞ 37888000) perpendicularis autem reperietur esse ℞ QQ (℞ 20000000 † 500 — ℞ 16200000.)



A C 2
A D 1
A B ℞ 5 † 1
A D ℞ (5 † ℞ 20)

℞ QQ (℞ 20000000 † 500 — ℞ 16200000)

℞ QQ (100 — ℞ 8000)

℞ 1600000000000 — ℞ 2000000000000 † 1296000000000

4 0 0 0 0 0   3 6 0 0 0 0

℞ 200000000000000 † 50000 — ℞ 16200000000000

Productum est 10.

Si fiat additio obseruatis pręceptis signorũ † & —, reperiemus

riemus ℞ 162000000000; de medio tollendas esse; at verò si ad 360000, addantur 50000, fit summa 410000, à quo si demantur 400000, remanebit 10000, cuius radix quadrato-quadrata est 10. Habetur autem bis ℞ Q 16200000000; quoniam ex ductu ℞ Q 20000000, in ℞8000; fit productum ℞162000000000; & afficitur signo — ; quoniam † in — facit —. At verò ex ductu ℞ 20000000, in 100, fit ℞ 200000000000, & afficitur nota † si verò ducatur ℞ 8000, in 500; fit ℞ 2000000000, horum summa est ℞ 162000000000, nam communis diuisor est ℞ 2000000000; quæ diuidens se facit quotientem ℞ 1, nempe 1; & diuidens ℞ 200000000000, facit quotientem ℞ 100, nempe 10, à quo dempto 1, fit residuum 9, ducatur in ℞ 2000000000, quod assequemur reducendo 9, ad naturam radicis; nimirum quadratè multiplicando; & fit productum ℞ 162000000000, afficiturq; nota †, cum altera afficeretur nota —. Quamobrem fit illud productum, vti dicebamus 10.

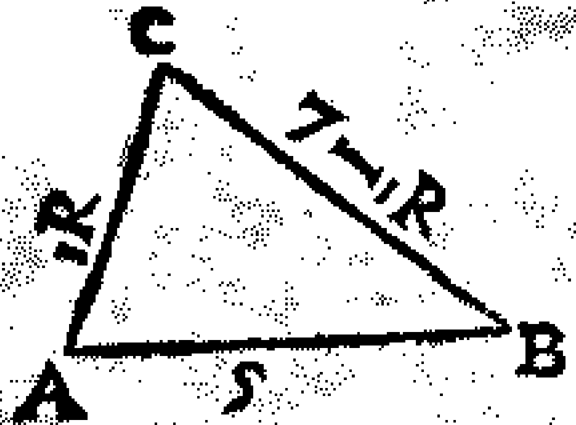
S C H O L I O N.

Ex huius Problematis resolutione, multorum quoq; resolutio potest inotescere, vt suo loco manifestum fiet, scilicet in nostro opere, in quo quamplurima Problemata resoluenda suscepimus. Cæterum hoc problema resoluendum nobis propositum fuit, nec apud aliquem auctorem illud enodatum vidimus, id autem animaduertisse operæ pretium iudicamus, ne si fortè lector viderit ab aliquo illi satisfactum fuisse, ab eo nos hanc resolutionem emendicasse arbitretur. Quod autem de hypothesi superficiei 10, pronunciauimus, cuicumq; numero quidem aptari poterit.

PROBLEMA DECIMVM OCTAVVM.

Data summa laterum alicuius trianguli, dataq; ratione summæ quadratorum à lateribus ad eiusdem trianguli superficiem reperire latera.

Datum sit triangulum ABC, cuius latera simul conficiant 12, ratio verò quadratorum simul sumptorum à lateribus ad superficiem trianguli sit, vt 25, ad 3. Latus AB, sit 5, summa reliquorum erit 7, dicamus vnum ex ipsis esse 1 R, puta AC, aliud, nempe BC, erit 7 — 1R, sumatur dimidium aggregati ex lateribus, nempe 6, & ab hoc dimidio subtrahantur singula latera, nimirum 1 R, 5, 7 — 1 R fient residua hæc, puta 6 — 1 R, 1, 1R — 1, ducatur 6 — 1 R, in 1, & fit 6 — 1 R, hoc productum ducatur in 1 R — 1, & fit 7 R — 6 — 1 Q, ducatur in idem dimidium 6, & fit 42 R — 36 — 6 Q, huius radix quadrata, videlicet ℞ (42 R — 36 — 6 Q) est trianguli superficies. Summa verò quadratorum ex lateribus est 74 — 14 R † 2 Q, cuius quadratum est 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ, & quadratum ex ℞ (42 R — 36 — 6 Q) est 42 R — 36 — 6 Q; vt verò est 3, ad 25, ita debet esse ℞ (42 R — 36 — 6 Q) ad 74 — 14 R † 2 Q, ergo vt est 9, ad 625, ita debet esse 42 R — 36 — 6 Q, ad 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ; quamobrem productum sub extremis, æquale est producto sub medijs; itaq; erit æquatio hoc modo 26250 R — 22500 — 3750 Q = 49284 — 18648 R † 4428 Q — 504 C † 36 QQ, & per antithesin fiet hæc æquatio, puta 44898 R † 504 C = 71784 † 8178 Q † 36 QQ, atq; demum 7483 R † 84 C — 1363 Q — 6 QQ = 11964, factoq; para-



6	6	6
1 R	5	7 — 1R
6 — 1 R	1	1 R — 1

1
6 — 1 R

1 R — 1
— 6 † 1 R
6R — 1 Q
7 R — 6 — 1 Q

$$
\begin{array}{r}
7 - 1R \\
7 - 1R \\
\hline
-7R + 1Q \\
49 - 7R \\
\hline
49 - 14R + 1Q \\
25 \\
\hline
74 - 14R + 1Q \\
1Q \\
\hline
74 - 14R + 2Q \\
74 - 14R + 2Q \\
\hline
148Q - 28C + 4QQ \\
-1036R + 196Q - 28C \\
5476 - 1036R + 148Q \\
\hline
5476 - 2072R + 492Q - 56C + 4QQ
\end{array}
$$

parabolismo fiet æquatio huiusmodi $\frac{7483R}{6} + \frac{84C}{6} - \frac{1363Q}{6} - 1QQ = \frac{11964}{6}$, & per Isomoeriam reducetur ex preceptis traditis suo loco, ad hanc æquationem, nimirum $269388R + 84C - 1QQ = 2584224$, cuius radix est 18, & quia (vt nos cap. de Parabolismo docuimus) hæc noua radix diuidi debet per communem illum diuisorem, siue per numerum elatioris potestatis, qui numerus cum sit 6, instituta diuisione, fiet quotiens 3, quãobrem Radix quæsita superioris æquationis $748R + 84C - 1363Q - 6QQ = 11964$, erit 3, cæterum huius æquationis $298388R + 84C - 8178Q - 1QQ = 2584224$, reperitur 18, vti dicebam arte suo suo loco superiùs tradita, & ad

& ad eum modum, quem vnicuiq; licet hic intueri. Neglex imus autem methodum Vieteam, vt pote nimis longam, sed nostra hac usi sumus, quæ compendiosior est; eadem hæc autem adhiberi potest in omnibus huius generis Problematibus, in quorum scilicet explicationibus huiusmodi æquationes occurrunt; æquationes enim, in quibus dignitates ad altiores gradus ascendunt, non dissimili artificio, possunt explicari; quemadmodum à nobis planum fiet;

	1 . 8
269388 R + 84 C − 8178 Q − 1 QQ =	2584224
Qvadrato quadratum primæ figuræ adde.	1
Ex Aggregato.	2594
Subtrahe cubum primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	84
A residuum.	25102
Adde quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8178
Ab aggregato annexa sequente figura.	332802
Subtrahe primam figuram ductam in numerum Radicum.	269388
Ad residuum Inuenta secunda figura.	63414
Adde quadruplum cubum primæ ductum in secundam.	32
Ad aggregatum.	66614
Adde sextuplum quadrati primæ figuræ ductum in secundam.	384
Ad aggregatum.	70454
Adde Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum secundæ.	2048
Adde aggregatum.	725024
Adde quadrato-quadratum secundæ figuræ.	4096
Ab aggregato.	729120
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & secunda figura.	2016
A residuo.	527520
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato secundæ figuræ.	161280
A residuo subtrahe cubum ex secunda figura ductum in numerum cuborum.	366240
	43008
Ad residuum.	323232
Adde numerum à producto dupli primæ & secundæ figuræ in numerum Quadratorum.	1308480
Ad aggregatum.	1631712
Adde numerum factum à quadrato secundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	523392
	2155104
A residuo.	2155104
Subtrahe numerum factum à secunda figura ducta in numerum Radicum; & nihil remanebit.	0 0

Superius igitur positæ æquationis Radix quadrata est 18; cæterum secunda figura 8; reperietur parato diuisore ad eum modum, quò superius insinuauimus; diuisor enim debet esse talis, vt instituta diuisione fiat quotiens, adeo vt additis addendis & subtractis subtrahendis nihil remaneat; reperietur autem, vti dicebamus, diuisor, sine magno labore ob-

sequens

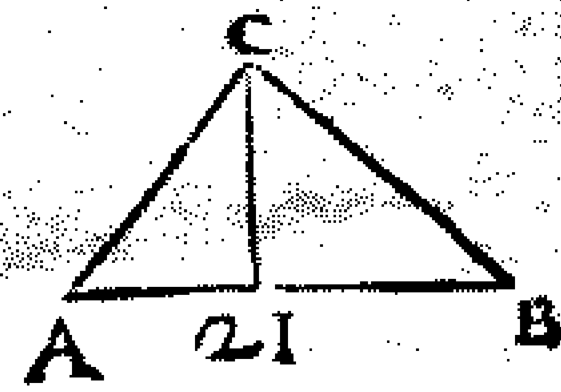
seruatis ijs, quæ nos superius explicuimus,

Ex his autem quæ nos in medium attulimus perspicuum est istarum æquationum explicationem non inutilem esse, quasi nimirum nullius momenti in ijs, quæ vsu venire solent extremari debeant, quemadmodum nonnullos insulsè loquentes sæpeiæpius audiuimus; sed longè clariùs earundem æquationum vtilitas constabit, vt opinor, cum nos Opus illud, in quo multissima Problemata resoluimus in studiosorum gratiam Typis committemus; quod breui, Deo fauente, Beatissimaq; Virgine opitulante futurum esse speramus.

PROBLEMA DECIMVMNONVM.

Data base trianguli, dataq; ratione summæ quadratorum à lateribus, ad superficiem trianguli reperire latera.

Daum sit triangulum ABC; cuius basis AB, sit 21; ratio verò quadratorum à lateribus ad superficiem trianguli, sit vt 569, ad 126.



Dico perpendicularem esse 1R, quæ si ducatur in 21, fit 21R, & erit 21R $=$ 126. Itaq; superficies erit 126, & perpendicularis dimidium 6; atq; adeo ipsa perpẽdicularis in tota erit 12, modo. Dico vnum ex segmentis basis esse 1R; aliud erit 21 — 1R; quadratum illius est 1Q; cui addito 144; quadrato perpendicularis, fit 1Q + 144, cuius ℞Q, nempe ℞(1Q + 144) erit latus vnum; aliud erit ℞(585 — 42R + 2Q) nam quadratum ex 21 — 1R, est 585 — 42R + 1Q cui addito 144 quadrato perpendicularis, fit 585 — 42R + 1Q; cuius latus quadratum

21 — 1R
21 — 1R

— 21R + 1Q
441 — 21R

441 — 42R + 1Q
144

585 — 42R + 1Q
℞(585 — 42R + 1Q)
℞(1Q + 144)

585 — 42R + 1Q
144

729 — 42R + 1Q
1Q

tum est, vti dicebam ℞(585 — 42R + 2Q); Summa quadratorum è lateribus erit 729 — 42 R + 2Q; quę ęquabitur 569, & per antithesin fiet æquatio 729 + 2Q = 569 + 42R, & rursus 160 + 2Q = 42R; instituto parabolismo. Fit æquatio 21R1Q = 80; cuius radix quadrata est 5. Itaq; segmentum vnum erit 5; aliud erit 16; at verò si 144, quadratum perpendicularis addatur, ad 25; quadratum ex 5; fiet 169, cuius ℞ est 13; si idem 144, addatur ad 256, fit 400; cuius ℞ est 20; itaq; latus vnum erit 13; aliud verò 20.

729 — 42R + 2Q = 569
42R
———
729 + 2Q = 569 + 42R
569
———
160 + 2Q = 42R

42R — 2Q = 160
21R — 1Q = 80

$10\frac{1}{2}$
$10\frac{1}{2}$
———
$110\frac{1}{4}$
80
———
$30\frac{1}{4}$
121
———

4	$10\frac{1}{2}$
11	$5\frac{1}{2}$
2	5. 1R valor.

PROBLEMA VIGESIMVM.

Cognitis lateribus alicuius trianguli, latus in eo inscriptibilis quadrati cognoscere.

Datum sit triangulum, cuius latera sint 13, 20, 21. oporteat reperire &c. Reperiatur perpendicularis, quæ erit 12; & segmenta basis erunt 16, & 5, Excessus perpendicularis supra latus quadrati inscriptibilis esto 1R; ergo latus ipsum erit 12 — 1R, vt autem est 12, perpendicularis ad segmentum vnum basis, ita excessus ille, ad segmentum lateris quadrati, quod illi segmento basis homologum est; (si enim in triangulo describatur quadratum, certè perpendicularis secabit latera ipsius) ergo illud segmentum late-

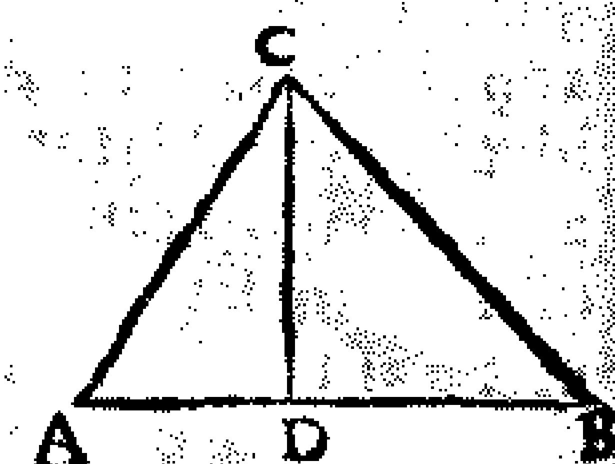
ris

ris erit $\frac{10R}{12}$ & vt eadem perpendicularis ad aliud segmentum basis; ita idem excessus ad segmentum alterum lateris quadrati; erit igitur $\frac{5R}{12}$ quamobrem $\frac{16R}{12}$ * $\frac{5R}{12}$ = 12 — 1R, & per antithesin erit demum æquatio 33 R = 144: quapropter 1 R, pretium erit 4 $\frac{12}{33}$ itaque latus quadrati erit 7 $\frac{21}{33}$ siue 7 $\frac{7}{11}$ &c.

PROBLEMA VIGESIMVMPRIMVM.

Triangulum reperire æquale dato triangulo, eiusdem ambitus, siue perimetri, & eiusdem altitudinis, ita tamen ut perimetrum ad perimetrum habeat datam rationem.

Datum sit triangulum ABC, cuius latus AB, siue basis sit 21, latus AC, sit 13, latus autem BC, sit 20, perpendicularis CD, erit, 12, segmenta erunt AD, 5, & DB 16, superficies autem 126, ratio verò data sit vt 1, ad 4, nempe perimetri trianguli ABC, ad trianguli quæsiti perimetrum.



Sit basis quæsiti trianguli 21, Ambitus trianguli ABC, est 54, fiat vt 1, ad 4, ita 54, ad aliud puta ad 256, igitur perimetrum quæsiti trianguli erit 256, à quo subtracta base 21, remanebit 195, Dicamus igitur latus vnum esse 1 R, latus alterum erit 195 — 1 R, dimidium ipsius perimetri erit 108, ab hoc autem dimidio subtrahatur 21, nempe basis remanebit 87, ducatur 108, in 87, & fit 9396, hoc autem multiplicetur per 108 — 1 R, nempe per dimidium summæ laterum minus latere illo quod ponebatur 1 R, & fiet productum 1832220R—9396 Q—882848 16 hoc autem æquabitur 15876, quadrato ex 126, nimirum ex superficie trianguli, quapropter per anti-the-

thesin fiet æquatio 1832220R — 9396Q $=$ 88300692. Instituto parabolismo fiet æquatio 195R — 1Q $=$ 9397 $\frac{540}{783}$ seu $\frac{20}{29}$ obseruatis autem artis præceptis, reperiemus latera esse 97 $\frac{1}{2}$ — ℞ 108 $\frac{65}{116}$, & 97 $\frac{1}{2}$ + ℞ 108 $\frac{65}{116}$.

SCHOLION.

Accepimus veluti certissimum Si fuerit triangulum, cuius latera e. g. sint 10. & 17; basis autem 21; differentia inter 24; dimidium perimetri, & basim 21, hæc inquam differentia est 3; dimidium perimetri est 24; multiplicetur 24 per 3; fit 72; quo ducto in 24; dimidium supradictum fit 1728, multiplicetur hic numerus per 3; differentiam supradictam fit 5184; huic addatur 7056, quadratum ex 84, superficie trianguli; & fit 12240, quo diuiso per 72; superius multiplicatione habitum &c. fit quotiens 170, numerus cui æqualis est ille, qui fit ex multiplicatione vnius lateris in summam laterum minus quadrato lateris prædicti; Vt si latus 10; ducatur in 27, summam laterum, producitur 270; à quo si subtrahatur 100; quadratum eiusdem lateris, remanet 170; vel si latus est 17; ducatur in 27; fit 459; à quo si dematur 289; quadratum eiusdem lateris remanet 170. Id quod etiam declarari potest in hoc alio triangulo, cuius basis est 140, latera verò sunt 130; 150, perimetrum erit 420; superficies autem, (cum perpendicularis sit 120) erit 8400; differentia verò qua basis superatur à dimidio perimetri est 70, nam basis est 140; & perimetri dimidium est 210; facta subtractione illius ab isto remanet 70; ducatur 210, in 70, fit 14700; quo ducto in 210, Fit 3087000; quo multiplicato per 70, fit 216090000; cui addito 70560000, quadrato ex 8400, superficie trianguli fit 286650000; Si verò ducatur 130; latus vnum trianguli in 280, summam laterum fit 36400; quadratum ex 130, est 16900; quo subtracto ex 36400; remanet 19500, si numerus ille 216090000. diuidatur per 14700; Fit quotiens 16900, quemadmodum si 9500 ducatur in 14700, producitur 286650000. &c. In idem coincidit iste processus, cum illo, quo superius vsi sumus ad Problema 18. Dico igitur latus vnum esse 1 R, aliud erit 195 — 1R, dimidium perimetri est 108, à quo subtrahatur 1R, remanet 108 — 1R; & ex 108; subtrahatur 21; remanet 87; subtrahatur 195; remanet R — 87, ducatur 108 — 1R in 87; fit 9396 — 87R; hoc autem productum multiplicetur per 1R — 87, & producitur 16965R — 817452 — 87Q, quod duci debet in 108, vt producatur 1832220R — 88284816 — 9396Q, cuius ℞ Q; nempe ℞ (1832220R — 88284816 — 9396 Q) æquatur 126, superficies trianguli; quamobrem eorum quadrata æqualia erunt; nimirum 1832220R — 88284816 — 9396Q $=$ 15876; & per antithesim fiet 1832220R — 9396Q $=$ 88300692, vt priùs dictum est.

LEMMA PRIMVM.

Qvadratum aggregati cuborum æquale est quadrato differentiæ eorundem, plus quadruplo cubo rectanguli sub lateribus.

Sint latera 2, & 5; horum cubi sunt 8; & 125; quorum summa 133; cuius quadratum est 17689; at vero differentia eorundem cuborum est 117; cuius quadratum est 13689; sed differentia inter 17689, & 13689, est 4000; nempe quadruplus cubus à rectangulo sub lateribus.

Sint latera A, & B, quadratum ex AC † BC, est ACC † 2 AC, in BC † BCC; quadratum ex AC — BC, est ACC — 2 AC in BC † BCC; ergo differentia quadratorum ex AC † BC, & ex AC — BC erit AC in BC, quater, quod oportebat ostendere. &c.

LEMMA SECVNDVM.

Cubus aggregati laterum minus triplo solido sub aggregato laterum in rectangulum sub lateribus est æqualis aggregato cuborum à lateribus,

Hoc Lemma eadem facilitate, ac superius declarabitur, & demonstrabitur. Sint latera 2, & 5, horum aggregatum est 7, cuius cubus est 343, à quo si dematur 2 10, nimirum triplum solidi sub aggregato laterum in rectangulum sub lateribus remanebit 133, nempe aggregatum cuborum à lateribus.

Sint latera A, & B, cubus ab A † B; est AC † 3 AQ in B † 3 A in BQ † BC; est verò solidum sub rectangulo 3 A in B, & A † B; idem quod 3 AQ in B † 3 A, in BQ, quamobrem. &c.

PROBLEMA VIGESIMVM SECVNDVM.

Est notum rectangulum sub lateribus, & aggregatum cuborum; quæruntur latera.

Notum sit rectangulum sub lateribus 10; aggregatum autem cuborum à lateribus sit 133; oporteat reperire latera; Summa laterum esto 1 R, per secundum Lemma erit 1C — 30R ═ 133; at verò quadratum ex 133; est 17689; triplum rectangulum erat 30, rectangulum est 10; cuius cubus est 1000; quadruplus cubus est 4000; horum autem differentia est 13689, & per primum Lemma 13689; erit quadratum differentiæ cuborum à lateribus; at verò R Q; numeri 13689, est 117; ob id 117; æquabitur differentiæ cuborum; quoniam autem 133, cum 117, faciunt 250, huius dimidium est 125; proinde 125, æquabitur cubo lateris maioris; ob id latus maius erit 5; & rursus quia 133, differt à 117, per 16, cuius dimidium est 8, erit 8, cubus lateris minoris, quo fit vt latus minus sit 2, & satisfaciunt. Problemati.

SCHO.

SCHOLION.

ACcepimus autem superius, quòd euidentissimum est nempe si 133, addatur ad 117; fit 250; cuius dimidium est 125; cuius latus cubicum 5; erit latus maius. Nec immeritò; Sint namque duo numeri; & ad eorum aggregatum addatur eorundem differentia; aggregati vero summatur dimidium; illud erit æquale numero maiori. Quamobrem si Sint duo numeri cubi 64, & 1728; horum aggregatum est 1792; eorundem differentia est 1664; qua illi addita fit 3456; cuius dimidium est 1728; numerus maior cubus è duobus. Et si differentia numerorum subtrahatur ab eorumrundem aggregato; residuum vero bifariam diuidatur, habetur numerus minor, quamobrem in superiori exemplo numeri cubi sunt 1728; & 64, horum aggregatum est 1792; à quo si auferatur 1664; differentia cuborum remanet 128; cuius dimidium 64, est numerus cubus minor; Hæc autem de quibuscunque verificantur.

Hoc autem ex eo deducitur, quia si sit recta quædam linea, vel aliquis numerus, in duas partes diuisus inæquales, tota linea, seu totus numerus, plus differentia partium: duplus est maioris partis. Et si differentia partium subtrahatur ab earundem aggregato, residuum est duplum partis minoris.

LEMMA.

CVbus differentiæ laterum plus triplo solido sub differentia laterum, in rectangulum sub lateribus est æqualis differentiæ cuborum à lateribus.

Sint latera vt supra, nempe 12, & 8, differentia ipsorum est 4; huius cubus est 64; cui addito triplo solido sub eadem differentia in rectangulum sub lateribus, nempe addito 1152, fit 1216: nimirum differentia cuborum à lateribus. Sint latera A, & B. Cubus ab A — B, est A C — 3 A Q, in B + 3 A in B Q — B C. At solidum illud triplum sub differentia laterum in rectangulum sub lateribus est 3 A Q, in B — 3 A in B Q, proinde horum summa erit A C — B C.

PROBLEMA VIGESIMVMTERTIVM.

DAto rectangulo sub lateribus, eorumq; differentia reperire latera.

Datum sit idem rectangulum 10, dataq; sit cuborum differentia 117, oportet reperire latera. differentia laterum esto 1 R; & per secundum Lemma antecedenti Problemati præpositum erit 1C + 30R, æquale 117, quadratum autem ex 117 est 13689; & rectangulum sub lateribus est 10; cuius triplum erat 30; cubus verò ex 10, est 1000; huius quadruplum est 4000; est verò 17689, summa ex 13689, & 4000, & eius ℞ Q, est 133; & 133, æquatur cubo lateris maioris plus cubo minoris sed 133, plus 117, siue summa ex 133, & 117, est 250, cuius dimidium est 125; hic erit cubus maior; atq; adeo 5, erit latus maius. Sed 133, multatus numero 117, est 16; æqualis, huius autem dimidium est 8, proinde 8; erit cubus minor atq; adeo minus latus erit 2.

PROBLEMA VIGESIMVM QVARTVM.

Est triangulum cuius basis est nota, & nota est summa laterum: est etiam nota proportio quadratorum à lateribus, quæruntur latera.

Trianguli basis sit 5, summa laterum nota est 7; proportio verò quadratorum à lateribus sit, vt 9, ad 16, Dico latus vnum esse 1 R; aliud erit 7 — 1 R, quadratum illius est 1 Q. istius verò est 49 — 14R + 1Q, vt verò est 9, ad 16, ita debet esse 1Q, ad 49 — 14R + 1Q; quamobrem fiet æquatio 16 Q = 441 — 126 R + 9 Q; & per antithesin fiet 16 Q + 126 R = 441 + 9 Q, & rursus 7 Q + 126 R = 441. Facto verò parabolismo fiet æquatio 1 Q + 18 R = 63, huius autem æquationis radix est 3.

Sit basis 10; laterum summa sit 12; proposito quadrati lateris minoris, ad quadratum lateris maioris sit vt 1, ad 4, latus vnum esto 1 R; aliud erit 12 — 1R, quadratum illius est 1 Q, istius verò 144—24R + 1Q vt autem est 1, ad 4, ita debet esse 1 Q, ad 144—24R + 1Q, ob id erit æquatio 4Q = 144—24 R + 1 Q, & per antithesin reiteratam

fiet

fiet $3Q + 24R = 144$; instituto parabolismo fiet æquatio $1Q + 8R = 48$. huius autem æquationis radix est 4, itaq; latus positum 1 R, erit 4; positum $12 - 1R$, erit 8.&c.

PROBLEMA VIGESIMVM QVINTVM.

Est triangulum, cuius perimetrum est notum; est etiam nota proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus, ad superficiem trianguli, iniunctum sit reperire latera.

Perimetrum notum sit 12; & proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus ad superficiem trianguli sit vt 7, ad 6; queruntur latera. Supponamus latus vnū, puta basim esse 5, ex duobus autem reliquis vnum esto 1 R, aliud erit $7 - 1R$, quadratum illius est 1 Q; istius autem est $49 - 14R + 1Q$, horum differentia est $49 - 14R$; At verò superficies trianguli est ℞ $(42R - 36 - 6Q)$ vt igitur est 7, ad 6; ita debet esse $49 - 14R$, ad ℞ $(42R - 36 - Q)$ quamobrem etiam, vt 49, ad 63, ita debet esse $2401 - 1372R + 196Q$; nimirum quadratum è $49 - 14R$; ad $42R - 36 - 6Q$m, quadratu superficiei. Proinde fiet æquatio $2058R - 1764 - 294Q = 86436 - 49392R + 7056Q$, nempe productum sub extremis æquale erit producto sub medijs; & per antithesin fiet æquatio talis $51450R - 7350Q = 88200$; facto verò parabolismo; fiet æquatio huiusmodi; nempè $7R - 1Q = 21$.

Huius autem æquationis radix est 3.

Rursus sit notum perimetrum 48; & proportio, vt 189, ad 84 supponamus basim esse 21; Latus vnum esto 1 R; aliud erit $27 - 1R$, quadratum illius est 1 Q; istius verò $729 - 54R + Q$; horum differentia est $729 - 54R$; est autem trianguli superficies ℞ $(1944R - 5184 - 72Q)$ Proinde eorum quadrata etiam proportionalia erunt. 1. *Hypoth.*

Vt 35721, ad 7056; Ita $531441 - 78732R + 2196Q$; ad $1944R - 5184 - 72Q$; quamobrem productum sub extremis æquabitur producto sub medijs; obseruatis artis præceptis fiet 1 R, pretium 10.

PRO-

PROBLEMA VIGESIMVMSEXTVM.

Est triangulum cuius perimetrum est notum, item nota est est proportio, quam habet rectangulum sub cruribus, ad superficiem trianguli, queruntur latera; supposita notitia basis.

Datum sit perimetrum 12; ratio verò data sit, vt 2; ad 1; latus vnum esto 1R, aliud erit 7—1R, (si basim constituamus 5;) rectangulum sub cruribus est 7R—1Q, quod ad ℞(42R—36—6Q) debet esse, vt 2, ad 1; proinde horum quadrata proportionalia erunt; nempe 4; 1; 49Q—14C+1QQ; & 42R—36—6Q, ergo productum sub extremis æquabitur producto sub medijs, itaq; 49Q—14C+1QQ = 168R—144—24Q, & per antithesin repetitam fiet æquatio huiusmodi 168R+14C—73Q—1QQ = 144; Huius porrò æquationis radix est 3.

Numero absoluto.	144
Quadrato quadratum radicis, puta numeri 3, adde.	81
Ad aggregatum.	225
Adde numerum factum à radice in numerum Quadratorum.	657
Ab aggregato.	882
Subtrahe numerum factum à cubo radicis in numerum Cuborum.	378
A residuo.	504
Subtrahe numerum factum à quadrato radicis in numerum Quadratorum.	504
Nihil remanet.	0 0

2. Hypoth. Sit notum perimetrum 48, & proportio rectanguli sub cruribus, ad superficiem trianguli vt 85, ad 42.

Sit basis 21; dicamus autem vnum ex cruribus esse 1R; aliud erit 27—1R; Rectangulum sub his est 27R—1Q, & vt 85, ad 42; ita esse debebit 27R—1Q, ad ℞(1944R—51-84—72Q) Quandoquidem huius trianguli superficies est ℞(1944R—5184—72Q) Proinde quadrata erunt proportionalia; itaq; vt 7225, ad 1764; ita erit 729Q—54C+1QQ, ad 1944R—5184—72Q. Ob id productum sub extremis æquabitur producto sub medijs; proinde fiet equatio 1285956Q—95256C+1764QQ = 14045400R—37-454400—520200Q, & per Antithesin fiet æquatio hoc modo

modo 1806156Q—95256C ✝ 1764QQ ⩵ 1404540R—37454400, & rursus fiet 1806156Q ✝ 1764QQ ⩵ 1404540R—37454400 ✝ 95256C, & rursus 1806156Q ✝ 37454400 ✝ 1764QQ ⩵ 1404540R ✝ 95256C, rursus fiet æquatio demum 14045400R ✝ 95256C—1806156Q—1764QQ ⩵ 37454400. Instituto parabolismo; fiet

$$\frac{14045400R}{1764} + \frac{95256C}{1764} - \frac{1806156Q}{1764} - 1QQ = \frac{37454400}{1764}$$

, & per Isomoeriam habebitur æquatio integra; hoc modo. 4370501409984 00R ✝ 95256C—3186059184Q—QQ ⩵ 2055889055247 3600; Huius æquationis radix erit 17640; qua diuisa per 1764, numerum elatioris potestatis, fiet quotiens, & Radix superioris æquationis ante celebratam Isomoeriam 10, &c.

Cæterum æquationẽ illam per Isomoeriam ad hanc reduci patet; cum enim R, distet à QQ, per C; ob id cubicè multiplicetur 1764, & producetur 5489031744, hic autem numerus si ducatur in 14045400, numerum radicum, producitur 77095646457177600; quo diuiso per 1764; fit quotiens 43705014998400; & numerus radicum; quoniam autem C, distat à QQ, per R, ob id ducatur 95256, in 1764, & producto diuiso per 1764, remanet idem numerus 95256, deinde quia Q, distat à QQ, per quadratum ducatur 1764, in se quadraticè, vt fiat 3111696, qui ductus in 1806156, producit 5620208400576; quo diuiso per 1764, fit quotiens 3186059184, & est numerus quadratorum. Deinde quia numerus distat à QQ, per QQ, proinde multiplicetur 1764, quadrato-quadraticè, vt producatur 9682651996416, qui numerus ductus in 37454400, numerum absolutum, facit productum 362657920934563430400, quo diuiso per 1764, fit quotiens 205588390552473600, pro numero absoluto.

PRO-

PROBLEMA VIGESIMVM SEPTIMVM.

Est triangulum rectangulum, cuius basis est nota; est etiam nota proportio, quam habet excessus quadratorum à cruribus supra quadrata segmentorum basis, ad differentiam quadratorum segmentorum eiusdem iniunctum sit reperire latera.

Basis nota sit 25, proportio verò vt 288, ad 175. Segmentum vnum basis est o 1R, aliud erit 25 — 1R, horum quadrata sunt 1Q, & 625 — 50R — 1Q, differentia istorum quadratorum est 625 — 50R, excessus autem quadratorum à cruribus circa rectum, supra quadrata segmentorum basis est duplum rectangulum sub ipsis segmentis, proinde 50R — 2Q, erit iste excessus, vt autem est 175, ad 288, ita 625 — 50R, ad 50R — 2Q, productum igitur sub extremis æquabitur producto sub medijs, ob id 180000 — 14400R, æquabitur 8750R — 350Q, & per antithesin fiet 180000 = 23150R — 350Q, atque adeo fiet æquatio instituto parabolismo $\frac{23150R}{350} — 1Q = \frac{180000}{350}$ per Isomoeriam reducetur ad hanc 23150R — 1Q = 63000000, huius autem æquationis radix est 3150, qua diuisa per 350, numerum altioris potestatis fit quotiens 9, & radix superioris æquationis, vt patet.

Dimidium numeri radicum est 11575, cuius quadratum est 133980625, à quo si dematur 63000000, remanet 70980625, huius autem latus quadratum est 8425, quod si dematur ex 11575, remanet 3150, pro 1R, pretio. Hic autem numerus Problemati satisfacit, quemadmodum vnusquisq; poterit experiri.

```
       11575
       11575
       -----
       57875
     81025
     57875
    11575
   11575
   ---------
   133980625
    63000000
   ---------
    70980625
     8 4 2 5

       11575
        8425
       -----
        3150
```

PRO-

PROBLEMA VIGESIMVMOCTAVVM.

Est triangulum, rectangulum, cuius basis est nota, est etiam nota proportio, quam habet productum ab excessu quadratorum è cruribus supra quadrata segmentorum basis ad differentiam quadratorum eorundem segmentorum, quæruntur latera.

Basis data sit 25; & proportio vt 2016, ad 7. Segmentum minus esto 1R, maius erit 25—1R; rectangulum sub his est 25R—1Q, cuius duplum est 50R—2Q, & hic est excessus, quo crurum quadrata superant quadrata segmentorum basis; at verò quadratorum differentia est 625—50R; vt igitur est 2016, ad 7; ita debet esse productum à 625—50R in 25R—1Q, ad 625—50R; huiusmodi verò productum est 31250R—3750Q✝100C, fiat igitur vt 2016, ad 7, ita 31250R—3750Q✝100C, ad 625—50R, productum sub extremis, nempe 218750R—26250Q✝700C, æquabitur 1260000—100800R, & per antithesin, fiet 319550R—26250Q✝700C = 1260000.

Instituto autem parabolismo fiet æquatio hoc modo $\frac{319550}{700}$R—$\frac{26250}{700}$Q✝1C = $\frac{1260000}{700}$ Et per Isomoeriam fiet æquatio huiusmodi 223685000R—26250Q✝1C = 617400000000.

Huius autem æquationis radix est 6300, qua diuisa, per 700, fit quotiens 9, & radix superioris æquationis. Per Isomoeriam autem æquationem illam superiorem ad hanc reduci, patet, Quoniam R, distat à C, per Q, proinde 700, ducatur quadraticè, vt fiat 490000, quo ducto in 319550, numero radicum fit 156579500000; quo diuiso per 700, fit quotiens, & numerus radicum 223685000, deinde numerus quadratorum remanet idem 26250. At quia numerus absolutus distat à C, per C, proinde 700; ducatur in se cubicè, vt producatur 343000000, qui ductus in 1260000, numerum absolutum producit

43218000000000, quo diuiso per 700, fit quotiens 61740000000, & est numerus absolutus.

S C H O L I O N.

Non erit abs re, numerosam huius generis æquationum analysin obseruare, Sit igitur æquatio.

	2 4
A numero absoluto. 1C + 10Q + 200R =	10144
Subtrahe cubum primæ figuræ, siue lateris primi.	8
A residuo.	22
Adde quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8
A residuo.	14
Subtrahe numerum factum à numero Radicum in primam figuram.	4
A residuo annexis sequentibus figuris.	1014
Subtrahe (inuenta secunda figura) numerum factum à triplo primæ figuræ, in quadratum secundæ figuræ, siue lateris secundi.	96
A residuo.	918
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ, in secundam figuram.	48
A residuo annexa postrema figura.	4384
Subtrahe cubum secundæ figuræ.	4
A residuo.	4370
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ figuræ, & secundæ in numerum Quadratorum.	32
A residuo.	1110
Subtrahe quadratum primæ figuræ in numerum à secunda figura in Quadr.	320
A residuo	800
Subtrahe numerum factum à secunda figura in numerum Radicum.	800
	0 0

Secunda verò figura reperitur animaduersis iis quæ supra docuimus; tum loquentes de Potestatibus puris, tum de affectis: Si enim è diuisoribus fiat triplum quadratum lateris primi, insuper triplum latus primum; deinde numerus Quadratorum ducatur in duplum lateris primi; insuper inter eosdem diuisores collocetur idem numerus, & præterea numerus radicum; omnibus tamen suis debitis locis collocatis, consurget diuisor. Q.c.

	2 4
SI foret æquatio 1 C ✝ 100 R — 20 Q ═	7 1 0 4
Numero absoluto Adde numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	8 0
	1 5 1 0 4
Ab aggregato.	8
Subtrahe cubum primæ figuræ.	7 1
A residuo.	4 0
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum Radicum.	3 1
Ad residuum.	3 2
Adde numerum factum (inuenta secunda figura) à producto primæ figuræ & secundæ in numerum Quadratorum.	6 3 0
Adde aggregatum.	3 2 0
Adde quadratum secundæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	6 6 2
Ab aggregato.	9 6
Subtrahæ numerum factum à triplo primæ figuræ in quadratum secundæ.	5 6 6
A residuo.	4 8
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ in secundam figuram.	8 6 4
A residuo annexa postrema figura.	6 4
Subtrahæ cubum secundæ figuræ.	8 0 0
A residuo.	8 0 0
Subtrahe numerum factum à secunda figura in numerum Radicum.	0 0

Paratur autem diuisor ad indagandam secundam figuram, quemadmodum dictum est, obseruatis tamen obseruandis, iuxta affectionis notas.

Cæterùm non dissimili artificio procedendum erit, in consimilibus æquationibus, quomodocunq; varientur notę ✝, & —.

PROBLEMA VIGESIMVMNONVM.

Est triangulum rectangulum, cuius basis est nota; item est nota proportio, quam habet rectangulum sub cruribus ad rectangulum sub segmentis basis; quæruntur latera.

Data sit basis 25, proportio iam dicta, vt 75, ad 36. Segmentum minus esto 1R, maius erit 25—1R, at verò crus quod conterminum est ipsi segmento minori medio loco proportionale est inter ipsum segmentum minus, & totam basim ob id illud erit ℞ (25R) reliquum verò crus erit ℞ (625—25R), rectangulum sub his est ℞ (15625 R—625Q) at rectangulum sub cruribus, debet esse ad rectangulum sub segmentis vt 75, ad 36; proinde vt 75, ad ad 36, ita erit ℞(15625R—625Q) ad 25R—1Q, ob id etiam quadrata erunt proportionalia; vt igitur est 5625 ad 1296, ita erit 15625R—625Q, ad 625Q—50C+1 QQ, atq; adeo productum sub extremis, æquabitur producto sub medijs, & obseruatis Artis præceptis, reperiemus 1 R, pretium esse 9.

PROBLEMA TRIGESIMVM.

Est rectangulum, cuius latera simul sumpta conficiunt 18; at verò, solida quæ continentur sub singulis lateribus, & rectangulo sub lateribus, sunt 64, & 512, quæruntur latera.

Suppositio. Supponendum est latera cubica ipsorum numerorum 512, & 64, puta 8, & 4, esse medio loco proportionalia inter latera quæsita, in ratione continua.

Dicamus vnum ex lateribus esse 1R, eius cubus est 1C, vt autem est 1C, ad 512, ita 512, ad 64, proinde 64C, æquabuntur 262144, quadrato ex 512, ob id 1C, æquabitur 4096, atque adeo si eruatur radix cubica ex numero 4096, habebitur 16, pro 1R, pretio, & est latus vnum latus alterum non latebit.

SCOLION.

Nota. *Ordo doctrinæ postulabat, vt hoc volumine, ea Problemata solueremus, quæ faciliora cum sint, à Tyronibus meliùs percipiuntur; at verò quæ sunt abstrusiora, quæq; maiorem difficultatem afferunt Analystæ in proprio volumine, fauente Deo nos afferemus, Non igitur nos carpat aliquis, quòd nonnulla problemata attulerimus, quæ sine magno labore soluuntur, & etiam quædam ab alijs soluta; propterea quod ordinem doctrinæ sequuti sumus; à quo nimirum didicimus à facilioribus initium desumendum esse. Reliquum est, vt gradum faciamus ad sextum exemplorum genus, in quo non nulla Problemata exhibemus rebus contracta; hunc enim ordinem ad initium polliciti sumus; vt nimirum horum Problematum genus in hac tractatione postremas partes ageret.*

Sex;

Sextum Problematum genus.

AD hoc genus ea reuocamus problemata, iuxta ordinem præſcriptum, quę ſunt rebus accomodata.

PROBLEMA PRIMVM.

DVo mercatores ſocietatem inierunt, hac tamen cautione, vt quiſq; lucretur iuxta poſitam à ſe pecunia quantitatem. Primus autem poſuit neſcio quid, & permanſit in ſupradicta ſocietate, per ſpatium 12, menſium; Secundus verò poſuit aureos 30; & permanſit in ſocietate per ſpatium 17, menſium; repererunt deniq; lucrum totum eſſe 18 $\frac{3}{4}$ aureos; primus verò pro lucro, & pecunia poſita habuit 26, aureos. quæritur quantum poſuerit primus.

Dico primum poſuiſſe 1 R, lucrum igitur primi erit $26 - 1R$, quandoquidem 26, lucrum eſt, & pecunia poſita à primò, eſt itaq; $26 - 1R$, lucrum primi in menſibus 12; modo dicendum, Si 1R dat $26 - 1R$, lucri menſibus 12, quantum nam dabit 30; pecunia poſita à ſecundo, & reperiemus dare $\frac{780 - 30R}{1R}$ ſpatio quidem eodem ſcilicet menſium 12; At verò ſi tantum dant menſes 12, quantum dabunt menſes 17; & reperiemus daturos $\frac{13260 - 510R}{12R}$ pro lucro ſecundi, horum lucrorum ſumma eſt $26 - 1R + \frac{13260 - 510R}{12R} = 18\frac{3}{4}$ & ordinata æquatione, erit æquatio huiuſmodi $129 + 423R = 13260$, Ac deniq; $1Q + 35R = 1105$, huius autem æquationis radix eſt 20.

Itaq; primus poſuit 20, aureos, Secundus 30, lucrum primi

primi erit 6, secundi verò 12; quę quidem lucra simul sumpta faciunt 18; vt opus est.

SCHOLION.

Hoc problema anno 1653 Florentiæ publicè fuit expositum resoluendum ab Arithmetico doctissimo, & quidem proponebatur omnibus Matheseos professoribus; cum autem Auctor eius aduerteret per plures menses à nemine fuisse quæstioni satisfactum; affixit schedulam, in qua dicebat, cum à nemine suæ quæstioni factum fuisset satis atq; adeo nemo esset, qui Florentiæ eam soluere sciret; se cuicumq; methodum explicaturum cupienti, nimirum illam addiscere; cum autem nihil mihi fuisset ignotius, demum relatum fuit rem ita se habere; & nimirum longo temporis spatio quæstionem illam publicè in locis solitis expositam extitisse, atque demum schedulam supradictam affixam esse; rogatus à quodam magno michi necessitudinis vinculo coniuncto, animum appuli ad ipsam quæstionem enodandam, & solutionem quam paucis horis adinueni curaui, ut ad Auctorem perueniret; qui cum cognosceret in ea nihil desiderari posse, mihi gratias, reddidit immortales; seq. mea solutione magnopere gauisum esse demonstrauit; cum à me quotidie voluerit erudiri.

PROBLEMA SECVNDVM.

Tres sunt mercatores societatem ineuntes. Primus autem imponit 40, aureos amplius, quàm secundus. Secundus verò ac tertius simul imposuerunt 100, aureos; lucrati sunt autem omnes simul 80; aureos, ex ipsis verò tertius pro suo lucro, seu pro lucri parte habuit 20. Quæritur quantum quisq; imposuerit, & quantum quisq; lucratus fuerit.

Dico primum imposuisse 1R + 40, secundus autem necesse est, vt imposuerit 1 R; hoc enim pacto primus imposuit 40; aureos amplius, quam secundus, & quia secundus ac tertius simul imposuerunt 100, aureos, ob id tertius necesse est, vt imposuerit 100 — 1R. Sunt igitur ea, quæ fuerunt imposita 1R + 40; nimirum à primo 1 R, à secundo 100 — 1R, à tertio lucrum primi esto 1 A, lucrum secundi sit 1 B, lucrum tertij, iam natum est, nempe 20, fiat autem per regulam auream

$$\text{Vt } 140 + 1R\text{, ad } 80 \left\{ \begin{array}{ll} 1R + 40 & \qquad 1A \\ 1R & \qquad 1B \\ 100 - 1R & \qquad 20 \end{array} \right.$$

Itaq; productum ab extremis æquabitur producto sub me-

medijs, quamobrem 2800 + 20 R = 8000 — 80R. Vtrinque additis 80R, quòd nimirum ſigno — afficiatur, & fiet 2800 + 100 R = 8000. Vtrinq; ablatis 2800, fiet 100R = 5200. Diuiſione autem inſtituta, fit quotiens 52, Itaque primus, qui poſuit 1R + 40, neceſſe eſt, vt poſuerit 92, ſecundus verò 52, tertius 48, ſumma illa 140 + 1 R erit 192.

140 + 1 R
20

2800 + 20R

100 — 1R
80

8000 — 80R

		92	38	64
192	80	52	27	192 128
		48	20	192

Itaq; lucrum primi erit 38 $\frac{64}{192}$, ſecundi 27 $\frac{128}{192}$. Tertij demum 20; & ſatisfaciunt. &c.

PROBLEMA TERTIVM.

DVo ſunt peregrini proficiſcentes eadem die à duobus ciuitatibus inter quas 300, milliaria intercipiuntur, alter verſus alterum. Notum eſt autem vnum conficere 30, milliaria quolibet die, alterum autem milliaria 20, quæritur quando ſibi mutuò occurrent, atque conuenient.

Dico in 1 R, dierum ſibi mutuo occurrere, & fiat, vt æquationem indagemus, quemadmodum 1; ad 30; ita 1R; ad 30 R, & vt ſe habet 1, ad 20; ita 1 R; ad 20 R, Summa radicum eſto 50 R; & prior quidem in 1 R, dierum, confecit 30R, milliarium, ſecundus autem in 1 R, dierum confecit 20R; milliariorum. Ita vt 50R, milliariorum confecerint ambo; ſed debebant conficere milliaria 300, proinde erit æquatio 50R = 300. Diuiſione autem inſtituta, fit 1R valor 6; Itaq; die ſexto peracto, ſibi mutuo occurrent peregrini ſupradicti.

PRO-

PROBLEMA QVARTVM.

Est quidam mercator, qui vendidit 50 libras partem Zaccari, & partem Cinamomi, aureis 130, at verò Zaccari libram vendidit tribus denarÿs, sed Cinamomi libram denarÿs duobus. Quaeritur quot vendiderit libras Zaccari, & quot Cinamomi.

Dico mercatorem vendidisse 1 R, librarum Zaccari ob id necesse est; vendiderit 50—1R, librarum Cinamomi; instituatur autem Regula aurea hunc in modum.

denar. 3 R
den. 100—2 R.

Zaccari lib. 1. den. 3. lib. 1. ? Cinamomi lib. 1. den. 2. lib. 50—1R. Summa verò denariorum erit 100 ✠ 2R, quæ debet æquari 130, & per antithesin 1 R ⊐ 30, atq; adeo fit 1 R, pretium 30.

1.	3.	30?	90
1.	2.	20?	40
			130.

PROBLEMA QVINTVM.

Decem mercatores cuidam creditori, hoc modo pecuniam debent.

Nouem excluso primo debent 545. *Deinde*
Nouem excluso secundo debent 540.
Nouem excluso tertio debent 535.
Nouem excluso quarto debent 595.
Nouem excluso quarto debent 571.
Nouem excluso sexto debent 560.
Nouem excluso septimo debent 589.
Nouem excluso octauo debent 625.
Nouem excluso nono debent 635.
Nouem excluso decimo debent 630.

Quæritur totius debiti summa; & singulorum. Debitum primi dico esse 1 R; cum autem nouem ipsorum debeant

545 ✠ 1R
540 ✠ 1A
535 ✠ 1C
571 ✠ 1D
560 ✠ 1E
589 ✠ 1F
625 ✠ 1G
635 ✠ 1H
630 ✠ 1I

debeant 545, ergo omnes decem debebunt 545 ✠ 1 R. Quoniam excluditur debitum secundi; & eo excluso reliqui debent 540; propterea. Tota summa erit 540 ✠ 1 A, erit enim A, debitum secundi, & ita 535 ✠ 1 B; erit tota summa; item 595 ✠ 1C; item 571 ✠ 1D; item 560 ✠ 1E, item 589 † 1 F, item 615 † 1 G, preterea 639 ✠ 1 H, demum 630 ✠ 1 I omnium radicum summa est 10 R — 355 ═ 1 R ✠ 545, & per antithesin fit 9 R ═ 900. Fitq; 1 R pretium 100.

545 † 1R ═ 540 † 1A
540

5 † 1 R ═ 1A

545 † 1R ═ 535 † 1C
535

10 † 1R ═ 1C

545 † 1R ═ 571 † 1 D
571

1R — 26 ═ 1 D

545 † 1R ═ 560 † 1 E
560

1R — 15 ═ 1 E

545 † 1R ═ 589 † 1 F
589

1R — 44 ═ 1 F

545 † 1R ═ 615 † 1G
625

1R — 80 ═ 1G

545 † 1R ═ 635 † 1H
635

1R — 70 ═ 1H

545 † 1R ═ 630 † 1I
630

1R — 85 ═ 1I.

PROBLEMA SEXTVM.

QVidam moriens testamentum condit, & relinquit 5000; aureos, distribuendos inter vxorem, filium, & tres filias has conditione; vt portio filij sit quadrupla portionis matris; & portio matris sit tripla portionis vnius filiæ. Quæritur quanta sit vniuscuiusq; portio.

Portio vnius filiæ esto 1 R, erit autem portio matris 3 R; & portio filij erit 12 R, erunt ergo 18 R, æquales 9000;

filiæ	1 R		500	
filiæ	1 R		500	
filiæ	1 R	Id est	500	aur.
Matris	3 R		1500	
filij	12 R		6000	
	18 R		9000	

Diuisis 9000, per 18, fiet quotiens 1 R, pretium 500, portio vnius filiæ, ob id portio matris erit 1500, & filij erit 6000.

PROBLEMA SEPTIMVM.

PInta 30, Vini Rubri vna cum 5, pintis Vini albi, constant aureis 100, atq; eodem pretio 15. Pinta Vini rubrij cum 5, Pintis Vini albi constant aureis 55, quæritur pretium vnius pintæ.

Pretium vnius pintæ Vini Rubri esto 1 R, proinde 30, pintæ valebunt 30R, igitur quinque pintæ vini albi valebunt 100—30R, at verò pintæ 15, Vini rubri, valebunt 15R, quamobrem quinque pintæ Vini albi constabunt 55—15 R, proinde fiet æquatio huiusmodi 100—30R ⚌ 55—15R, & per Antithesin erit 15R ⚌ 45, atque adeo

adeo instituto parabolismo fit vnius Radicis pretium 3.

PROBLEMA OCTAVVM.

Est Mercator, qui in quattuor nundinis eamdem aureorum summam exponens Lucratus est in singulis $\frac{1}{10}$ sua summæ, deinde ad alias se conferens nundinas Lucratus est $\frac{1}{7}$ eiusdem suæ summæ priori lucro auctæ, deprehendit autem habere aureos 1600, quæritur aureorum summa.

Summa aureorum esto 1R, quoniam autem in singulis nundinis Lucratus est $\frac{4}{10}$ R, ob id post quattuor illas nundinas habebit 1 $\frac{4}{10}$ R, hoc est $\frac{14}{10}$ R, cum autem lucratus sit deinde $\frac{1}{7}$ eiusdem summæ priori lucro auctæ, proinde diuidatur $\frac{14}{10}$, per 7, & fit $\frac{1}{5}$ R, addatur ad $\frac{14}{10}$ R, & fit $\frac{8}{5}$ R, & erit æquatio $\frac{8}{5}$ R $=$ 1600, tollatur fractio, & fiet æquatio 8R $=$ 8000, instituto parabolismo, fiet R, pretium 1000, & hæc est aureorum summa quæsita.

PROBLEMA NONVM.

Tres sunt Mercatores qui summam aureorum æqualiter diuidere volebant, interim contentione suborta ad manus ventum est tantum autem quisque rapuit quantum per eum potuit, contentione sedata singuli suas pecunias numerarunt, ac demum deprehenderunt, primum acceptis 15, à secundo habere numerum æqualem residuo ipsius secundi, at verò secundum acceptis 18, à tertio, habere numerum æqualem residuo tertij, tertium autem acceptis 22, à primo, habere numerum triplum illius qui superest primo, quæritur Summa.

Dicamus primum habuisse 1R, igitur acceptis 15, à secundo habebat 1R + 15, hic verò numerus æqualis est residuo secundi, quamobrem secundus antequam daret 15, primo, habebat 1R + 30, acceptis autem 18, à tertio, habebat 1R + 48, & hic æqualis est residuo tertij proinde tertius, antequam daret 18, secundo habebat 1R + 66, sed tertius acceptis 22, à primo, est 1R + 88, qui quidem nu-

 merus

merus triplus eſt illius qui ſupereſt primo, nimirum 1 R — 22; ob id multiplicetur 1R — 22 per 3, & fiet æquatio 1 R + 88 = 3R — 66, obſeruatis artis præceptis fiet æquatio 2 R = 154, inſtituto paraboliſmo fit vnius R, pretium 77. Itaq; primus habuit 77, ſecundus habuit 107, tertius denique 143, & hi numeri Quæſtioni ſatisfaciunt vt perſpicuum eſt.

PROBLEMA DECIMVM.

EST ſerici magnum pondus, cuius multæ libræ ſunt ſerici Anglici, multæ aliæ Mediolanenſis, multæ demum Neapolitani, ſericum Anglicum eſt 5000, at verò multitudo librarum ſerici Mediolanenſis eſt dimidium librarum ſerici Anglici, & Neapolitani item multitudo librarum ſerici Neapolitani eſt $\frac{1}{5}$ ſerici Anglici, & Mediolanenſis, quæritur multitudo Librarum ſerici Mediolanenſis, & Neapolitani, & quanta ſit tota multitudo.

Supponamus multitudinem ſerici Mediolanenſis eſſe 1 R, igitur multitudo librarum ſerici Anglici cum multitudine Librarum ſerici Neapolitani, erit 2 R, tota itaq; multiplitudo erit 3R, ſed quia multitudo librarum ſerici Neapolitani eſt $\frac{1}{5}$ ſerici Anglici, & Mediolanenſis, & ſericum Mediolanenſe cum Anglico eſt 1R + 5000, proinde ſericum Neapolitanum erit $\frac{1}{5}$ R + 1000, modo quia ſericum Anglicum eſt Librarum 5000, Mediolanenſe 1R, & Neapolitanum $\frac{1}{5}$ R + 1000, tota igitur ſumma erit 1 $\frac{1}{5}$ R + 6000, quę ęquabitur 3R ſubtracto autem 1 $\frac{1}{5}$ R vtrinque fiet $\frac{9}{5}$ R = 6000, inſtituto paraboliſmo fit 1 R, pretium 3333 $\frac{1}{3}$, itaq; ſericum Anglicum erat 5000, Mediolanenſe verò 3333 $\frac{1}{3}$ Neapolitanum denique 1666 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

QVidam emit numerum equorum, illud autem conſtat ſi ſeorſum emiſſet $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, & inſuper 10, haberet equos

400,

400, *quæritur æquorum numerus.*

Numerus hic esto 1 R, cuius $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{13}{12}$ R, additis 10 fit $\frac{13}{12}$ R $+$ 10, & erit æquatio $\frac{13}{12}$ R $+$ 10 $=$ 400, vtrinque sublatis 10, remanet æquatio $\frac{13}{12}$ R $=$ 390, diuisione instituta fit quotiens 360, & est numerus quæsitus, nam eius dimidium est 180, tertia pars est 120, quarta verò pars est 90, horum summa est 390, cui additis 10, fit 400.

PROBLEMA DECIMVM SECVNDVM.

Est quidam, qui seruo promisit pro duodecim mensibus 20, aureos cum sex sestarijs frumenti, & quatuor Vini cadis, transactis mensibus octo illi dedit duos aureos cum sestarijs frumenti, & vini cadis, quæritur pretium, & Vini cognita proportione vnius ad alterum, nimirum pretij frumenti ad pretium Vini, & 3, ad 4.

Dico pretium vtriusque esse 1 R, igitur illi debebatur 1 R $+$ 20 aurei pro mensibus duodecim, modo instituatur regula aurea, si 12 menses poscunt 1 R $+$ 20, quid postulabit vnicus mensis, & reperietur $\frac{1R + 20}{12}$, deinde dicendum si 8, menses poscunt 1 R $+$ 2, quid requiret vnicus mensis, & reperietur $\frac{1R + 2}{8}$ erit igitur æquatio $\frac{1R + 20}{12} = \frac{R + 2}{8}$ instituatur multiplicatio per crucem, & fit æquatio 8 R $+$ 160 $=$ 12 R $+$ 24, & obseruatis artis præceptis, reperietur vnius R, valor 34, & est pretium frumenti, & Vini simul, vt autem eorum pretia seorsum cognoscamus, cum notum sit pretium frumenti, ad pretium Vini esse vt 3, ad 4, fiat ob id diuisio, numeri 34 in duas partes hac seruata cautela. & reperiemus partes esse 14 $\frac{4}{7}$, 19, $\frac{3}{7}$. Itaq; pretium frumenti erit 14 $\frac{4}{7}$ Vini autem 19 $\frac{3}{7}$.

PROBLEMA DECIMVMTERTIVM.

Qvidam habet duos æquos, & vnum mulum, cuius pretium est 200. aur. hoc additum ad pretium primi equi facit pretium quadruplum pretij secundi æqui. Idem autem muli pretium additum secūdo facit prætium æquale pretio primi equi. Quæritur pretium vtriusq; equi.

Pretium primi equi esto 1R, ergo 1R ✠ 200, sunt quadrupla pretij secundi equi; quamobrem eius æstimatio erit $\frac{1}{4}$ R ✠ 50, aur. cui si accesserit muli pretium 200, aur. erit eius pretium $\frac{1}{4}$ R ✠ 250, quod æquabit 1R; nempe pretio primi equi; vtrinque sublata $\frac{1}{4}$ R fiet $\frac{3}{4}$ R ═ 250; diuisione instituta fit 1 R, pretium 333 $\frac{1}{3}$ & est pretium primi equi; Secundus equus, cuius pretium erat $\frac{1}{4}$ R ✠ 50, erit 133 $\frac{1}{3}$, & satisfaciunt Quæstioni.

Quo pacto cognoscantur Problemata impossibilia.

CAPVT XVIII.

PRoblema quidem impossibile censetur, cum in eius analysi incidimus in æquationem impossibilem.

At verò æquatio impossibilis illa est, in qua totum proponitur æquari parti, & magnitudo maior ponitur minori æqualis, & contra.

Exemplum primum. *Exemplum primum. Reperire numerum, qui additus dato mero, faciat numerum, cuius quadratum æquale sit quadrato dati numeri.*

Datus sit numerus 12; & oporteat reperire numerum, qui additus ad 12; faciat numerum, cuius quadratum æquale sit quadrato ipsius 12.

Nume-

Numerus addendus esto 1R; ergo aggregatum erit 12+1R, cuius quadratum 144+24R+1Q, debet esse æquale 144; Hoc est Problema impossibile; si quidem plus est ex vna parte æquationis; quàm ex altera.

Exemplum secundum. *Numerum reperire, qui ductus in 6 R, idem verò ductus in 24, faciat 24R*, Quæsitus numerus esto 1R, qui ductus in 6 R; idem verò ductus in 24, facit 24R ergo erit æquatio 6R = 24R; quæ quidem æquatio est impossibilis; totum enim foret æquale parti. *Exemplum secundum.*

Exemplum tertium. *Numerum inuenire, cuius quadratum ductum in 3, & producto additis 15, fiat tantum quantum fit si eiusdem numeri quadratum ducatur, in 2, productoq; addantur 10.* *Exemplum tertium.*

Numerus quæsitus esto 1 R, eius quadratum est 1 Q, quod si ducatur in 3; fiunt 3 Q, quibus si addantur 15, fiunt 3Q+15, his autem deberet æquari 10+2Q, quod est impossibile.

Exemplum quartum. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt ex ductu vnius in alterum gignatur quadratum totius.* *Exemplum quartum.*

Datus sit numerus 12, diuidendus. &c. Pars vna esto 1R alia erit 12—1R; productum à partibus est 12R—1Q quod deberet æquari 144; quadrato totius. Hoc Problema est impossibile ob impossibilitatem æquationis, est autem æquatio impossibilis; etenim quadratum dimidij numeri radicum est 36; à quo nequit subduci 144, numerus absolutus; Accedit etiam, quod 144, quadratum totius, maius est, quam rectangulum sub partibus, vt patet ex 2. Elementorum prop. 4.

Cæterùm autē proponenda sunt huius generis problemata ne quis credat impossibilitatem eorum ignorari à proponente, vt hìc elapsis annis contigit, nam cum à peritissimo viro huiusmodi problema erudiendi gratia data opera discipulo proponeretur, quidam impudens sicophanta ab eo impossibilitatem iguorari, constanter affirmabat. *Aduerte sicophātæ inscitiam.* *Segnius iudicium ferendum, & maturè.*

Qua

Qua arte cognoſcantur Problemata vana, & nugatoria.

CAPVT XIX.

Quid ſit Problema vanum, & nugatoriū, Quid ſit inutilis æquatio.

PRoblema vanum, & nugatorium eſt, in cuius reſolutione Analyſta incidit in æquationem inutilem. Inutilis ea porrò cenſetur æquatio, in qua duo numeri æquales, & eiuſdem denominationis comparantur. Dum itaque contingit æquatio inter duos numeros æquales, & eiuſdē denominationis, cōparantur ęquatio illa cenſetur vana, & nugatoria; Ita quidē nugatoria foret ęquatio iſta 6Q ═ 6R, ex huiuſmodi enim æquationibus nulla noua cognitio erui poteſt.

Exemplum primum.

Exemplum primum. *Numerum diuidere in duas partes, vt illi qui fiunt ſub toto &, qualibet parte ſimul æquales ſint quadrato totius.*

Numerus datus ſit, 12, diuidendus &c. Pars vna eſto 1R, alia erit 12—R numeri facti ſub toto, & qualibet ex partibus erunt 12R, & 144—12R, horum ſumma eſt 144. numerus autem hic æqualis eſſe debet 144, quadrato totius.

Exemplum ſecundum.

Exemplum ſecundum. *Numerum reperire, qui ductus in 4, & numerus productus multiplicatus per 5 R, faciat numerum ęqualem illi, qui fit ex multiplicatione in ſe ipſum, & ex hoc in 20.*

Quæſitus numerus eſto 1 R, qui ductus in 4, facit 4 R, is autem ductus in 5 R, facit 20Q. Si verò 1 R; ducatur in ſe, fit 1Q, quod ſi multiplicetur per 20, fiunt 20Q, debet igitur eſſe æquatio inter 20Q & 20Q, quę quidem inutilis eſt; quandoquidem inde nulla eruitur noua cognitio.

Exemplum tertium.

Exemplum tertium. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt quadruplus numerus factus ſub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æqualis ſit quadrato totius*

Datus

Datus sit numerus 12, diuidendus &c. pars vna sit 1R, alia erit 12—1R, qui fit autem a partibus est 12R—1Q, huius quadruplum est 48R—4Q, si huic autem addatur 144—48R+4Q, quadratum differentiæ partium fit 144, hoc autem debet æquari 144, quadrato totius.

Exemplum quartum. *Datum numerum diuidere in duas partes; vt ille qui fit à partibus vna cum quadrato à differentia partis maioris, & dimidij æqualis, sit quadrato ipsius dimidij.* *Exemplum quartum.*

Datus sit numerus 12, diuidendus &c. pars vna sit 1R, alia erit 12—1R, qui fit numerus ab his partibus est 12R—1Q, cui addito quadrato ex differentia 6—1R, quod est 36—12R, & fit 36, & hoc æquale esse debet quadrato ex dimidio, nempe ex 6, quod est 36. Inutilis autem hæc est æquatio, vt constat, ac proinde Problema vanum, & nugatorium, est.

SCHOLION.

HAEc dicta sint de Algebra Numerosa, pauca Problemata attulimus eaq; faciliora; quia plura, & abstrusiora in proprio volumine sumus allaturi.

Admonitio

Aduertendum autem, cum nos superius in Algorithmo numerorum Denominatorum, & præcipuè in Scholio ad paginam 84, diximus additionem, & subtractionem potestatum, quæ numerantur à numeris irrationalibus, instituendam esse, reperiendo communem diuisorem, & quotientes vel in vnum colligendos, si fuerit additio, vel vnum subtrahendum ex altero, si fuerit subtractio, & summam, vel differentiam multiplicandam iuxta radicis naturam, deinde productum ducendum in communem diuisorem, id est intelligendum iuxta leges numerorum irrationalium, adeo vt quando nos attulimus exempla, quorum primum erat, dum proponeretur ad ℞Q 20R addere ℞Q 5R, communem diuisorem istorum numerorum 20, & 5, diximus esse 5, qui diuidens 20, facit quotientem 4, diuidens 5, facit quotientem 1, horum latera quadrata sunt 2, & 1 horum summa est 3, quæ debet quadratè duci, vt fiant 9, hoc productum ducendum in 5, communem diuisorem, vt fiat 45, cuius ℞Q est ℞Q 45, & erit ℞Q 45R summa quæsita, hoc ita debet intelligi, vt nimirum numerorum propositorum ℞20, & ℞5, reperiatur communis diuisor, qui est ℞5, hic porrò diuidens ℞20, facit quotientem ℞4, nempe 2, diuidens ℞5, facit quotientem ℞1, nimirum 1. Verùm quia dum numerus irrationalis diuidi debet per irrationalem, instituitur diuisio, non secus ac si essent numeri absoluti, hoc est quadratum vnius diuiditur per quadratum alterius, & quotientis sumitur radix, & prodit hoc modo quotiens quæsitus; ob id nos ibi, & alibi agentes de potestatibus numeratis à numeris breuitati studentes hoc modo loquuti sumus, erat enim dicendum oportet reperire communem diuisorem istorum numerorum ℞20, & ℞5, communis diuisor est ℞5, qui diuidens ℞20 facit quotientem ℞4, hoc est 2, & diuidens ℞5, facit quotientem ℞1, hoc est 1, at quia diuisio instituitur diuidendo 20, per 5, & 5, per 5, ideo neglexìmus illum loquendi modum, sed de his tractantes de numeris surdis nos cumulatè egimus, &c.

Illud

Illud insuper aduertendum si quandoq; in operationibus numerorum irrationalium hac loquendi formula vsi sumus; nempe si ad ℞ 20; addere debeamus ℞ 5; communis diuisor est 5; qui diuidens 20; facit quotientem 4; cuius radix quadrata est 2, diuidens 5, facit quotientem 1, cuius radix quadrata est 1 &c. id fecimus breuitati studentes; namque communis diuisor est ℞ 5, qua diuidens ℞ 20; facit quotientem ℞ 4, hoc est 2; & 2; diuidens ℞ 5, facit quotientem ℞ 1; nempe 1, sed quoniam dum diuidi debet radix quadrata, per radicem quadratam instituitur diuisio inter quadrata; ita cum ℞ C, debet diuidi ℞ C, instituitur diuisio inter cubos, & ita de reliquis &c. ob id aliquando neglexímus tam accuratum loquendi modum, quod animaduertisse volumus.

Praeterea quandoq; praetermisimus aliquam operationem facientem minus ad rem exempli gratia ad paginam 385; cum diceremus primam partem esse $60 - \frac{1}{2}R - ℞\left(\frac{432000 - 90Q\ \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *cuius quadratum esse dicebamus*

$$3600 - 60R + \tfrac{1}{4}Q + \frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}.$$

Aduertendum est $60 - \frac{1}{2}R - ℞\left(\frac{432000 - 90Q\ \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in se multiplicato; fieri ne dum* $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q + \frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$, *sed etiam aliquid aliud huic addendum; si quidem est* $℞\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in se fit* $\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$ *ex ipso verò* $℞\left(\frac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in* $60 - \frac{1}{2}R$, *fit quaedam radix ligata, affecta signo — ex* $60 - \frac{1}{2}R$, *in se fit* $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q$; *at verò dum* $60 - \frac{1}{2}R +$

℞ (43-

℞ $\left(\frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2R}\right)$ ducitur in se fiunt illa producta, ut supra, cum hoc discrimine, quod dum multiplicatur uti dicebam ℞ $\left(\frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2R}\right)$ per 60 $- \frac{1}{2}\,R$, fit radix ligata affecta signo + at verò quia in additione + & — fit subtractio, ob id prætermisimus illa producta, quia quantum ad hanc additionis operationem, perinde est ac si non adessent. Hoc autem placuit advertere. Quantum enim ad additionem, quam in illa operatione intendebamus, non alij adhibentur numeri quàm supradicti, reliqui ob signa + & — de medio tolluntur.

Ad extremum Si Lector in Paradig. viderit numerorum notas minus benè dispositas advertat pretium unius cuiusq; nam inde facile poterit illarum ordinationem corrigere; Si nos interfuissemus, Typographus non ita frequenter lapsus esset.

Algebræ Numerosæ Finis.